In[1]:=
```
Inizioesecuzione = DateString[];
Print["Info : questo file è stato eseguito il ", Inizioesecuzione];
```

```
Info : questo file è stato eseguito il Sat 1 Mar 2014 17:50:23
```

Versione autonoma della libreria in fase di sviluppo

In[3]:=
```
lofaccio = False; If[lofaccio,
 Print["Farà calcoli di verifica molto lunghi... circa 10 minuti"],
 Print[
  "Attendere circa 50 secondi per attivare le funzioni della libreria..."]];
```

```
Attendere circa 50 secondi per attivare le funzioni della libreria...
```

Tensoriale$lib 26 aprile 2013 (versione con test)

Questa versione della libreria tensoriale mira a definire una versione facilmente traducibile in altri linguaggi, primo tra tutti Javascript.

Definisco un oggetto ossia la metrica$ che contiene tutte le definizioni di maggiore importanza...

Le variabili della metrica e quelle ausiliarie sono obbligatoriamente t$, x$, y$ e z$ ed opzionalmente, quando ho bisogno di due distinti sistemi di coordinate, s$, r$, h$ e p$ ed in genere uso un qualsiasi nome concluso col carattere $. Scelgo questa convenzione per rendere facile la sostituzione del nome di una variabile con un qualsiasi editor.

In Javascript ed in *Mathematichese* il carattere $ è ammesso come carattere del nome di una variabile.

Ovviamente Javascript non è un linguaggio di programmazione simbolico e dunque non posso manipolare a livello simbolico le formule ma se uso la function eval( ) posso valutare una stringa ossia, per esempio, eval("Math.exp(x$)") ossia la valutazione della stringa "Math.exp(x$)" fornisce un risultato numerico corretto se in precedenza ho definito correttamente il valore della variabile x$.

Per tradurre le formule di *Mathematica* in Javascript debbo dunque scrivere in modo esplicito il valore delle derivate delle funzioni che utilizzo ossia se, per esempio, uso la function "Math.pow(x$,3)" ossia il cubo della variabile x$, devo anche specificare l'espressione della derivata prima rispetto ad x$ ossia "3*Math.pow(x$,2)" o , se voglio una maggiore prestazione di calcolo numerico, posso scrivere "3*x$*x$" mentre la derivata seconda è ovviamente "6*x$".

Nell'oggetto metrica$ di *Mathematica* metto dunque come primo elemento il nome delle variabili che intendo usare ossia, di default il vettore {t$,x$,y$,z$} ma eventualmente posso usare altri nomi anche se cercherò di usare sempre quei nomi standard indipendentemente dal fatto che x$, y$ e z$ siano coordinate cartesiane. Come secondo elemento metterò la matrice del tensore metrico, come terzo elemento lo pseudotensore a tre indici delle derivate prime del tensore metrico e come quarto elemento lo pseudotensore a quattro indici delle derivate seconde del tensore metrico.

Ovviamente la matrice del tensore metrico è una matrice simmetrica per cui la matrice deve essere identica alla sua trasposta e da questo fatto derivano molte ridondanze nello pseudotensore di rango 3 delle derivate prime e nello pseudotensore di rango 4 delle derivate seconde del tensore metrico a parte il fatto che nella derivazione parziale di una funzione le derivate commutano ossia non è importante la sequenza delle derivazioni

Libreria di nuovo stile...

Deve scambiare il primo indice di un tensore con l'indice specificato se il primo argomento è il numero d'ordine dell'indice da fare diventare il primo.
Se invece il primo argomento è il tensore e il secondo è il numero d'ordine, allora l'indice specificato viene scambiato con l'ultimo indice del tensore.

Ovviamente richiamando due volte la funzione si ottiene l'identità ossia si ottiene il tensore specificato inizialmente.

In[4]:=

```
(* Scambia un indice intermedio col primo o con l'ultimo *)
(* Se il primo arg. è un intero,
prende quell'indice dal tensore secondo argomento
 e lo fa diventare primo indice ed al suo posto mette il primo indice *)
(* Se il secondo arg. è un intero,
prende quell'indice del tensore primo argomento
 e lo fa diventare ultimo indice ed al suo posto mette l'ultimo indice *)
Scambio$[ti_, it_] :=
  Block[{m, n, per1, tt$}, m = ArrayDepth[ti]; n = ArrayDepth[it];
   If[And[n > 0, m == 0, NumberQ[ti]],
    m = Min[Max[ti, 1], n]; per1 = Range[n]; per1[[1]] = m; per1[[m]] = 1 ;
    tt$ = Transpose[it, per1],
    If[And[m > 0, n == 0, NumberQ[it]], n = Min[Max[it, 1], m]; per1 = Range[m];
     per1[[m]] = n; per1[[n]] = m; tt$ = Transpose[ti, per1],
     Print["Scambio$ : errore argomenti"]; Return[False];]];
   tt$];
```

Questa funzione ossia **la trasposizione generalizzata** è una funzione di servizio molto utile ed intuitiva ma non va confusa con la funzione di scambio di una coppia di indici...

In[5]:=
```
(* La trasposizione generale *)
(* Se l'intero precede il tensore,
fa diventare primo indice quello specificato
 e quello che era il primo diventa il secondo, il secondo diventa il terzo
  mentre gli indici dopo quello specificato restano dove stanno...  *)
(* Da non confondere con lo scambio di indici che sarebbe diverso perché lo
 scambio del primo col terzo indice lascia
 fermo il secondo mentre la Tg$ fa diventare
 primo il terzo, secondo il primo e terzo il secondo *)
(* Nel puro scambio di indici la
 doppia applicazione rimette a posto gli indici
 mentre con la Tg$ occorre usare lo stesso intero ma col segno opposto *)
Tg$[ti_, it_] := Block[{i, ls, ad, tn}, If[ArrayQ[ti], ad = ArrayDepth[ti];
     If[it > 0, ls = Table[If[i > it, i - 1, If[it > i, i, ad]], {i, ad}],
      If[0 > it, ls = Table[If[i == ad, -it, If[i ≥ -it, i + 1,
            If[-it > i, i]]], {i, ad}], ls = Table[i, {i, ad}]]];
     tn = Transpose[ti, ls], ad = ArrayDepth[it];
     If[ti > 0, ls = Table[If[ti > i, i + 1, If[i > ti, i, 1]], {i, ad}],
      If[0 > ti, ls = Table[If[i == 1, -ti, If[i > -ti, i, If[-ti ≥ i, i - 1]]],
         {i, ad}], ls = Table[i, {i, ad}]]];
     tn = Transpose[it, ls]];
    Return[tn]];
```

La funzione Tr serve a calcolare la traccia ma quando si vuole la traccia a soli due livelli di un tensore di rango ovviamente maggiore di due, fa la traccia solo dei primi due indici senza naturalmente controllare che i due indici siano di tipo diverso ossia uno covariante e l'altro controvariante.

http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Tr.html

Per questo motivo è opportuno disporre di questa funzione:
La funzione Trincodacov$ fa la traccia degli ultimi due indici e non dei primi due ed inoltre presuppone che gli ultimi due indici siano entrambi covarianti.

Dato che la traccia è ammessa solo tra indici di tipo diverso, questa funzione usa, come secondo argomento, il tensore metrico covariante per trasformare il penultimo indice in controvariante. Se per caso i due ultimi indici fossero già di tipo diverso basta passare alla Trincodacov$ come secondo argomento, la matrice identità ossia la IdentityMatrix[Length[tt]]

http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/IdentityMatrix.html

Se per caso entrambi gli ultimi due indici fossero entrambi controvarianti si potrebbe o rendere covariante l'ultimo indice in modo che i due indici siano di tipo diverso ed usare quindi, come secondo argomento la identità oppure passare alla funzione non il tensore metrico covariante ma il tensore metrico controvariante ossia la matrice inversa del tensore metrico covariante ovvero Inverse[g2] documentata qui:

http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Inverse.html

In[6]:=
```
(* Calcola la traccia dei due ultimi indici che stanno in coda *)
(* ATTENZIONE : il primo argomento ossia il tensore tt,
deve avere gli ultimi due indici covarianti *)
(* il secondo argomento ossia g2 è il tensore metrico covariante *)
Trincodacov$[tt_, g2_] := Block[{rt = ArrayDepth[tt]},
    Simplify[Tr[Dot[Inverse[g2], Tg$[rt, Tg$[rt, tt]]], Plus, 2]]];
```

Il simbolo di Christoffel ossia questo pseudotensore di rango tre è una grandezza assolutamente fondamentale.

Utilizza la funzione di derivazione documentata qui:

http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/D.html

In[7]:=

```
(* Il simbolo di Christoffel di
 prima specie con tensore metrico qualsiasi *)
FaCh$3[gg2_, lv1_] :=
  Block[{g = D[gg2, {lv1}]}, Simplify[(g + Tg$[g, 1] - Tg$[3, g]) / 2]];
```

In letteratura vengono riportati due modi per calcolare il tensore di Riemann, uno con il primo indice controvariante e l'altro con tutti i quattro indici covarianti. Definisco qui le due funzioni che applicano le due formule in modo di fare verifiche in caso di dubbi...

In[8]:=

```
FaRiemann$41[g2_, lv1_, info_: 0] := Block[
   {g211, g3, ch3, ch31, ch41, ra4, rb4, cx4, rc4, rd4},
   g211 = Simplify[Inverse[g2]];
   g3 = D[g2, {lv1}];
   If[info ≠ 0, Print["FaRiemann$41: fatto g3"]];
   ch3 = (g3 + Tg$[g3, 1] - Tg$[3, g3]) / 2;
   ch31 = Simplify[Dot[g211, ch3]];
   If[2 > Length[lv1],
    Return["FaRiemann$41: Lista variabili inferiore a 2"]];
   ch41 = D[ch31, {lv1}];
   ra4 = Tg$[ch41, -3];
   rb4 = ch41;
   cx4 = Simplify[Dot[ch31, ch31]];
   rd4 = Tg$[cx4, 2];
   rc4 = Tg$[rd4, -3];
   Simplify[ra4 - rb4 + rc4 - rd4]];
```

In questa formula non viene fatto uso del gradiente del simbolo di Christoffel ed il risultato è il tensore di riemann in forma totalmente covariante.

In[9]:=
```
(* Riemann totalmente covariante *)
FaRiemann$4[g2_, lv1_, info_: 0] := Block[
   {g211, g3, g4, ch3, tt4, ta4, tb4, ga4, gb4, gc4, gd4},
   If[2 > Length[lv1],
    Return["FaRiemann$4: Lista variabili inferiore a 2"]];
   g211 = Simplify[Inverse[g2]];
   g3 = D[g2, {lv1}];
   If[info ≠ 0, Print["FaRiemann4: fatto g3"]];
   g4 = D[g3, {lv1}];
   If[info ≠ 0, Print["FaRiemann$4: fatto g4"]];
   ch3 = (g3 + Tg$[g3, 1] - Tg$[3, g3]) / 2;
   If[info ≠ 0, Print["FaRiemann4: fatto ch3"]];
   tt4 = Dot[Tg$[ch3, 1], g211, ch3];
   ta4 = Tg$[3, tt4];
   tb4 = Tg$[ta4, 3];
   ga4 = Tg$[g4, 2];
   gb4 = Tg$[3, g4];
   gc4 =  Tg$[g4, -2];
   gd4 =  Tg$[gb4, 3];
   Simplify[(ga4 + gb4 - gc4 - gd4) / 2  + ta4  - tb4] ];
```

Il tensore di Ricci è importantissimo in Relatività Generale e qui viene calcolato...

In[10]:=
```
(* Ricci totalmente covariante *)
FaRicci$2[g2_, lv1_, info_: 0] := Block[{r41},
   r41  = Simplify[Dot[Inverse[g2], FaRiemann$4[g2, lv1]]];
   If[info ≠ 0, Print["FaRicci$2: fatto r41"]];
   Simplify[Tr[Tg$[3, r41], Plus, 2]]];
(* oppure usando l'altro modo di creare il tensore di Riemann *)
FaRiccibis$2[g2_, lv1_, info_: 0] := Block[{r41},
   r41  = FaRiemann$41[g2, lv1];
   If[info ≠ 0, Print["FaRicci$2: fatto r41"]];
   Simplify[Tr[Tg$[3, r41], Plus, 2]]];
```

Per verificare la correttezza della metrica dei buchi neri dotati di carica bisogna saper calcolare il campo elettromagnetico in forma totalmente covariante partendo dal vettore potenziale elettromagnetico espresso, anche lui, in forma covariante.

In[12]:=
```
(* Il vettore potenziale deve essere
 assegnato in forma covariante ossia è upot1 *)
Facampoelettrico$2[upot1_, lv1_] := Simplify[D[upot1, {lv1}] -
    Transpose[D[upot1, {lv1}]]];
```

Il tensore Energia Impulso del campo elettromagnetico è definito qui per consentire la verifica dell’equazine di Einstein.

In[13]:=

```
(* Tensore energia impulso moltiplicato per la
 permeabilità magnetica cambiata di segno *)
(* f2_ == tensore elettromagnetico nudo, in forma totalmente covariante.
  Deve essere una matrice antisimmetrica *)
(* g2_ == tensore metrico nudo in forma totalmente covariante.
   Deve essere una matrice simmetrica *)
(* va moltiplicato per il quadrato
 cambiato di segno della velocità della luce
 per epszero ossia la permittività elettrica del vuoto ossia ϵ0 *)
(* Introduco la costante L$  che vale esattamente 10 milioni
 e che consente di definire eps$0 e la velocità della luce è c$ *)
eps$0 = L$ / (4 Pi c$^2);
FaTenEI$2[f2_, g2_] := Block[{e$0, g2sim, f2as, g211, t2, tra0},
   e$0 = L$ / (4 Pi c$^2);
   (* antisimmetrizza il tensore del campo solo per sicurezza *)
   f2as = (f2 - Transpose[f2]) / 2;
   (* simmetrizza il tensore metrico solo per sicurezza *)
   g2sim = (g2 + Transpose[g2]) / 2;
   g211 = Inverse[g2sim];
   t2 = Dot[f2as, g211, f2as];
   tra0 = Tr[Dot[g211, t2]] / 4;
   (* In questo modo la traccia
    del tensore energia impulso è sicuramente nulla *)
   Simplify[(-c$^2 e$0) (t2 - tra0 g2sim)]];
```

Definisco l’importante costante dell’equazione di Einstein

In[15]:=

```
(* Costante einsteniana *)
kein$0 =  8 Pi G$ / c$^4;
```

Varie costanti importanti in Fisica...

In[16]:=
```
c$luce = 299 792 458;
Print["Velocità della luce nel vuoto : ", N[c$luce, 12], " [m/s]"];
L$numerica = 10 000 000; Print["Valore numerico di L$ : ",
 N[L$numerica, 12], " [C^2/(kg*m)] "];
permeamav$ = Pi / 2 500 000; Print["Permeabilità magnetica del vuoto : ",
 N[permeamav$, 12], " [Henry/m]"];
permitelv$ = 1 / (c$luce c$luce permeamav$);
Print["Permittività elettrica del vuoto : ",
  N[permitelv$, 12], " [Farad/m]"];
(* Costante di gravitazione universale *)
gravuni$ = 667 428 / 10^16;
(* numero di Avogadro *)
mole$ = 60 221 415 * 10^16;
(* carica dell'elettrone *)
qelet$ = 1 602 176 487 / 10^28;
(* massa dell'elettrone *)
melet$ = 91 093 826 / 10^38;
(* unità di massa atomica , un dodicesimo dell'atomo di carbonio°12 *)
muatom$ = 166 053 886 / 10^35;
(* massa del Sole *)
msole$ = 19 891 * 10^26;
(* massa della Terra *)
mterra$ = msole$ / 332 946;
(* unità astronomica *)
uastro$ = 149 597 870 700;
(* raggio della Terra considerata sferica *)
rterra$ = 6 371 000;
```

Velocità della luce nel vuoto : $2.99792458000 \times 10^{8}$ [m/s]

Valore numerico di L$: $1.00000000000 \times 10^{7}$ [C^2/(kg*m)]

Permeabilità magnetica del vuoto : $1.25663706144 \times 10^{-6}$ [Henry/m]

Permittività elettrica del vuoto : $8.85418781762 \times 10^{-12}$ [Farad/m]

Fondamentale funzione di cambiamento di coordinate e di trasformazione della natura degli indici da covarianti a controvarianti e viceversa...

IMPORTANTE DA RICORDARE LA REGOLA GENERALE DEL CAMBIAMENTO DELLE COORDINATE...

Sia **Jnv la matrice Jacobiana** ottenuta derivando le funzioni delle vecchie coordinate espresse in funzione delle nuove.

Se Vv1 è un vettore covariante vecchio e Vv11 lo stesso vettore ma in forma controvariante allora ottengo il nuovo vettore Vn1 covariante e il nuovo vettore Vn11 ma in forma controvariante con queste trasformazioni:

Vn1 = Dot[Transpose[Jnv], Vv1];
Vn11 = Dot[Inverse[Jnv], Vv11];

Da queste formule appare subito evidente che :

Dot[Vv1, Vv11] = Dot[Vv11, Vv1] = Dot[Vn1, Vn11] = Dot[Vn11, Vn1]

L'ovvia estensione della trasformazione per tensori di rango 2 (tra cui è importantissimo il tensore metrico... ma il tensore metrico è uno solo dei tanti tensori di rango due concepibili), si fa con queste formule detto Tv2 un tensore di rango 2 totalmente covariante e Tv211 lo stesso tensore ma totalmente controvariante (dove, se Tv2 è il tensore metrico covariante, Tv211 è il tensore metrico controvariante ossia la sua matrice inversa... DEVE essere la sua matrice inversa e questo fornisce un modo per controllare di avere fatto le trasformazioni di coordinate in modo corretto...)

```
Tn2 = Dot[ Transpose[ Jnv ], Dot[ Tv2, Jnv ] ];
Tn211= Dot[ Inverse[ Jnv ], Dot[ Tv211,Transpose[ Inverse[ Jnv ] ] ] ];
```

Usando la permutazione degli indici, dunque si deve fare, per ogni indice, lo scambio tra l'indice da trasformare ed il primo indice, poi la trasformazione dell'indice fatto diventare primo e poi rimettere al suo posto l'indice scambiandolo con quello che era il primo e che ritorna ad essere il primo. Ovviamente se l'indice è covariante lo si moltiplica per la trasposta della matrice jacobiana mentre se è controvariante lo si moltiplica per la matrice inversa della jacobiana. Questo è l'algoritmo da applicare a tensori di qualsiasi rango.

In[30]:=

```
(* tralba$ vuol dire TRAsformazione_ALto_BAsso *)
(* MATRICE DI TRASFORMAZIONE: *)
(* tra2_ ==
 matrice di trasformazione del vecchio sistema di coordinate nel nuovo,
oppure  può essere il tensore metrico nudo usato per convertire i
 tensori da controvarianti a covarianti o viceversa dato che
 le operazioni sono pilotate dalla lista cambia1 *)
(* Nel caso di cambiamento degli indici, consiglio di usare il tensore
 metrico COVARIANTE che serve per ottenere un vettore covariante avendo un
 vettore controvariante. Per fare questo bisogna che cambia1 valga {1} *)
(* Se invece è una matrice di
 trasformazione deve essere la matrice che serve
 per trasformare un vettore controvariante
 in un nuovo vettore controvariante
 nel nuovo sistema di coordinate. Dunque in questo caso tra2 deve essere
 l'inversa della matrice jacobiana  *)
(* Notare che bisogna avere il
 vettore delle trasformazioni per poter cambiare
 il sistema di riferimento e la matrice delle derivate delle funzioni,
detta lo
 Jacobiano, è la matrice usata, trasponendola,
per trasformare i vettori covarianti
 mentre la sua inversa serve per trasformare i vettori controvarianti *)
(* Notare che la matrice jacobiana di
 solito NON E' SIMMETRICA per cui ovviamente
 anche la matrice inversa, di solito NON E' SIMMETRICA *)
(* QUALE TENSORE: *)
(* ten$_ == tensore nudo di rango maggiore di 0 da trasformare *)
(* COSA CAMBIA: *)
(* cambia1_ ==
 lista di pilotaggio del cambiamento. Se un elemento vale 1 allora
  si applica la trasformazione tra2_ ,
se vale -1 allora applica la trasposta
  dell'inversa di tra2_ dato che, nel caso di trasformazione di coordinate,
  l'indice è covariante,
se vale 0 non fa cambiamenti e questa opzione serve nella
 trasformazione del tipo da covariante a controvariante o viceversa *)
```

```
(* Se per convenzione tendo a
  usare solo o prevalentemente vettori covarianti
  allora per ottenere i corrispondenti controvarianti dovrò usare il
  tensore metrico covariante ed indicare con -1 quegli indici che voglio
  fare diventare controvarianti *)
tralba$[tra2_, ten$_, cambia1_] :=
  Block[{inTtra2, i, ii, n, nc, per1, nuovo$},
   If[ArrayDepth[tra2] ≠ 2,
    Return["Errore: primo arg non matrice ossia tensore di rango 2"]];
   If[ArrayDepth[cambia1] ≠ 1,
    Return["Errore: secondo argomento non lista"]];
   (* Se la lista cambia contiene un intero positivo,
   usa la trasformazione tra
    ma se l'intero è negativo usa l'inversa della trasformazione tra *)
   inTtra2 = Transpose[Inverse[tra2]];
   n = ArrayDepth[ten$];
   per1 = Range[n];
   (* Se è un vettore ossia ha rango 1 *)
   If[cambia1[[1]] > 0,
    nuovo$ = tra2.ten$;,
    If[0 > cambia1[[1]], nuovo$ = inTtra2.ten$;,
     nuovo$ = ten$]];
   If[n == 1, Return[nuovo$] ];
   (* Se invece non è un vettore fa questo... *)
   nc = Length[cambia1];
   (* Se il rango del tensore è maggiore della lunghezza della lista
    continua ad usare l'ultimo elemento di cambia *)
   For[i = 2, n ≥ i, i++,
    per1[[1]] = i; per1[[i]] = 1;
    ii = Min[i, nc];
    If[cambia1[[ii]] > 0,
     nuovo$ = Transpose[tra2.Transpose[nuovo$, per1], per1];,
     If[0 > cambia1[[ii]],
      nuovo$ = Transpose[inTtra2.Transpose[nuovo$, per1], per1]]];
    per1[[1]] = 1; per1[[i]] = i];
   Simplify[nuovo$]];
```

Per calcolare l'invariante quadratico totale di un tensore totalmente covariante (calcola internamente il tensore totalmente controvariante ossia OCvariante).

In[31]:=
```
(* Invariante
 totale : applicabile a tensori di qualsiasi rango in spazi di
   qualsiasi numero di dimensioni *)
FainvaTotale$[tco$_, g$2_] := Block[{toc$, toc$tco, ade},
   ade = ArrayDepth[tco$];
   (* tensore di qualsiasi rango
    totalmente controvariante ossia ocvariante *)
   toc$ = tralba$[g$2, tco$, {-1}];
   toc$tco = TensorProduct[toc$, tco$];
   Simplify[TensorContract[toc$tco, Array[{#1, #1 + ade} &, {ade}]]]];
(* Si tratta di una funzione potentissima che, mio parere,
 va molto sperimentata perché si basa su funzioni di Mathematica che,
sperabilmente, sono corrette ma... ragionando da S. Tommaso... *)
```

Dcov$ fa la derivata covariante di tensori di qualsiasi rango non nullo (la derivata degli scalari è già automaticamente covariante ossia produce già il corretto vettore gradiente dello scalare. I pasticci nascono quando si deve fare il gradiente di un vettore o di un tensore di rango superiore per cui vanno usati i simboli di Christoffel)

Dcov$ sfrutta pesantemente la funzione Scambio$ anche se forse si sarebbe potuto fare qualcosa di più efficiente ma meno leggibile.

In[32]:=
```
(* Il tensore ten, primo argomento, può avere indici sia covarianti
 che controvarianti *)
(* Il vettore tipo1 specifica la natura
 degli indici. Se l'intero è pari l'indice
 corrispondente è covariante, se è dispari è controvariante *)
(* Anche se il calcolo si sarebbe potuto fare una volta per tutte,
questa funzione ricalcola i simboli di Christoffel partendo dal
 tensore metrico dato come terzo argomento ossia g2 *)
(* Il quarto argomento, il vettore lv1,
è la lista del nome delle variabili
 ossia, normalmente, in relatività, occorrono 4 simboli,
il tempo e le coordinate spaziali *)
Dcov$[ten_, tipo1_, g2_, lv1_] := Block[{ch3, ch31, chs3, td, at, bt, ran, j},
   ran = ArrayDepth[ten];
   If[1 > ran,
    Print[
     "Dcov$ : Il tensole primo argomento deve essere almeno un vettore! "];
    Return[False]];
   If[Length[tipo1] ≠ ran,
    Print["Dcov$ : Secondo argomento, lista tipi incongruente ",
     " con tensore di rango dato"];
    Return[False]];
   If[ArrayDepth[g2] ≠ 2,
    Print["Dcov$ : Terzo argomento, tensore metrico errato"];
    Return[False]];
   If[Length[g2] ≠ Length[lv1],
    Print["Dcov$ : Lista delle variabili incongruente"];
    Return[False]];
   ch3 = Simplify[FaCh$3[g2, lv1]];
   ch31 = Simplify[Dot[Inverse[g2], ch3]];
   chs3 = Scambio$[2, ch31];
```

```
(* Qui fa il gradiente ordinario
 aggiungendo un indice alla fine e non all'inizio *)
td = D[ten, {lv1}];
(* Qui calcola e aggiunge le
 correzioni per ottenere la derivata covariante *)
For[j = 1, ran ≥ j, j++,
 at = Scambio$[ten, j];
 (* Se il tipo è pari l'indice è covariante,
 se dispari è controvariante *)
 If[Mod[tipo1[[j]], 2] == 0,
  bt = -Dot[at, ch31];
  bt = Scambio$[bt, j];
  bt = Scambio$[bt, ran];
  bt = Scambio$[bt, j]  ,
  bt = Dot[at, chs3];
  If[ran > j,
   bt = Scambio$[bt, ran];
   bt = Scambio$[bt, j];
   bt = Scambio$[bt, ran];];
 ];
 td = td + bt;];
Simplify[td]];
```

Verifica delle formule

Utilizzo della funzione per la trasformazione di coordinate

La funzione tralba$ è molto importante e di uso generale per cui riporto qui qualche semplice esempio pratico per mostrare come concretamente va usata.

Come primo test considero uno molto facile ossia come passare dalle coordinate sferiche a quelle cartesiane e viceversa quando vale la Relatività Speciale ossia non ci sono energie e masse più o meno concentrate a deformare la metrica.

Per passare dalle coordinate sferiche classiche alle coordinate cartesiane mi occorrono queste espressioni ipotizzando che θ vari da 0 a π e che quindi l'equatore sia a $\pi/2$.

```
In[33]:= (* Definisco i simboli delle coordinate sferiche in 4 dimensioni *)
esempio°sferico = {t, ρ, θ, ϕ };
esempio°incartesiano = {t, ρ Sin[θ] Cos[ϕ], ρ Sin[ θ] Sin[ ϕ], ρ Cos[θ]};
Print[
  "Trasformazione classica da sferico in cartesiano esempio°cartesiano:= \n",
  esempio°incartesiano];
esempio°jacocart = FullSimplify[D[esempio°incartesiano, {esempio°sferico}]];
Print["Matrice Jacobiana per cartesiana desunta esempio°jacosfer:=\n",
  MatrixForm[esempio°jacocart]];
```

Trasformazione classica da sferico in cartesiano esempio°cartesiano:=
{t, ρ Cos[ϕ] Sin[θ], ρ Sin[θ] Sin[ϕ], ρ Cos[θ]}

Matrice Jacobiana per cartesiana desunta esempio°jacosfer:=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta] & \rho\,\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\phi] & -\rho\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi] \\ 0 & \mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi] & \rho\,\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi] & \rho\,\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta] \\ 0 & \mathrm{Cos}[\theta] & -\rho\,\mathrm{Sin}[\theta] & 0 \end{pmatrix}$$

Per fare la trasformazione contraria ossia per passare dalle coordinate cartesiane alle coordinate sferiche mi occorrono queste espressioni:

In[38]:=
```
(* Definisco i simboli delle coordinate cartesiane in 4 dimensioni *)
esempio°cartesiano = {t, x, y, z};
(* Definisco le funzioni di trasformazione da cartesiane in
 sferiche applicabili a patto che x non sia esattamente zero,
altrimenti uso un x positivo ma veramente trascurabile *)
esempio°insferico =
  {t, Sqrt[x^2 + y^2 + z^2], ArcCos[z / Sqrt[x^2 + y^2 + z^2]], ArcTan[y / x]};
Print["Trasformazione classica da cartesiano in sferico\n",
  esempio°insferico];
esempio°jacosfer = FullSimplify[D[esempio°insferico, {esempio°cartesiano}]];
Print["Matrice Jacobiana per sferica desunta esempio°jacosfer:= \n",
 MatrixForm[esempio°jacosfer]];
```

Trasformazione classica da cartesiano in sferico

$$\left\{t,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \mathrm{ArcCos}\left[\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right],\ \mathrm{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]\right\}$$

Matrice Jacobiana per sferica desunta esempio°jacosfer:=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ 0 & \frac{x\,z}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}\,(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{y\,z}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}\,(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & -\frac{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ 0 & -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Suppongo ora di avere il tensore covariante della Relatività Speciale in coordinate cartesiane:

In[42]:=
```
grscarte$2 = DiagonalMatrix[{c$^2, -1, -1, -1}];
Print["grscarte$2 :=", MatrixForm[grscarte$2]];
```

$$\text{grscarte\$2 :=} \begin{pmatrix} c\$^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per averlo in coordinate sferiche devo fare così usando l'inversa della matrice Jacobiana che, in questo caso di uso molto frequente, è una matrice non simmetrica e dunque adatta a mettere a dura prova la funzione tralba$:

In[44]:=
```
grssfer$2 = tralba$[Inverse[esempio°jacocart], grscarte$2, {-1, -1}];
Print["grssfer$2 :=", MatrixForm[grssfer$2]];
```

$$\text{grssfer\$2 :=} \begin{pmatrix} c\$^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho^2\,\mathrm{Sin}[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

Però posso usare a trasposta della matrice jacobiana e non l'inversa, facendo così:

In[46]:=
```
grssfer$2b = tralba$[Transpose[esempio°jacocart], grscarte$2, {1, 1}];
Print["grssfer$2b :=", MatrixForm[grssfer$2b]];
```

$$\texttt{grssfer\$2b :=}\begin{pmatrix} c\$^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho^2\,\mathrm{Sin}[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

Ora voglio fare la trasformazione contraria usando le trasformazioni che esprimono le coordinate sferiche in funzione di quelle cartesiane:

In[48]:=
```
provvisorio$a = tralba$[Inverse[esempio°jacosfer], grssfer$2, {-1, -1}];
grscarte$2a = Simplify[
  provvisorio$a /. ρ → esempio°insferico[[2]] /. θ → esempio°insferico[[3]]]
Print["grscarte$2a :=", MatrixForm[grscarte$2a]];
```

Out[49]= $\{\{c\$^2, 0, 0, 0\}, \{0, -1, 0, 0\}, \{0, 0, -1, 0\}, \{0, 0, 0, -1\}\}$

$$\texttt{grscarte\$2a :=}\begin{pmatrix} c\$^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per evitare di dovere gestire un tensore metrico contenente funzioni trigonometiche posso usare come variabile indipendente in geometria sferica non θ ma Cos[θ] che chiamo h$ ossia definisco:

In[51]:=
```
$sferico1t = {t$, r$, h$, p$};
$cartesiano1 = {t$, x$, y$, z$};
trasfocarte$ = {t$, r$ Sqrt[1 - h$^2] Cos[p$], r$ Sqrt[1 - h$^2] Sin[p$], r$ h$ };
jatrasfocarte$ = FullSimplify[D[trasfocarte$, {$sferico1t}]];
trasfosferi$ =
  {t$ , Sqrt[x$^2 + y$^2 + z$^2], z$ / Sqrt[x$^2 + y$^2 + z$^2], ArcTan[y$ / x$]};
jatrasfosferi$ = FullSimplify[D[trasfosferi$, {$cartesiano1}]];
Print["trasfocarte$ := ", trasfocarte$];
Print["jatrasfocarte$ := ", MatrixForm[jatrasfocarte$ ]];
Print["trasfosferi$ := ", trasfosferi$];
Print["jatrasosferi$ := ", MatrixForm[jatrasfosferi$ ]];
```

$$\texttt{trasfocarte\$:=}\left\{t\$, \sqrt{1-h\$^2}\, r\$\,\mathrm{Cos}[p\$], \sqrt{1-h\$^2}\, r\$\,\mathrm{Sin}[p\$], h\$\, r\$\right\}$$

$$\texttt{jatrasfocarte\$:=}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-h\$^2}\,\mathrm{Cos}[p\$] & -\frac{h\$\, r\$\,\mathrm{Cos}[p\$]}{\sqrt{1-h\$^2}} & -\sqrt{1-h\$^2}\, r\$\,\mathrm{Sin}[p\$] \\ 0 & \sqrt{1-h\$^2}\,\mathrm{Sin}[p\$] & -\frac{h\$\, r\$\,\mathrm{Sin}[p\$]}{\sqrt{1-h\$^2}} & \sqrt{1-h\$^2}\, r\$\,\mathrm{Cos}[p\$] \\ 0 & h\$ & r\$ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\texttt{trasfosferi\$:=}\left\{t\$, \sqrt{x\$^2+y\$^2+z\$^2}, \frac{z\$}{\sqrt{x\$^2+y\$^2+z\$^2}}, \mathrm{ArcTan}\left[\frac{y\$}{x\$}\right]\right\}$$

$$\texttt{jatrasosferi\$:=}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x\$}{\sqrt{x\$^2+y\$^2+z\$^2}} & \frac{y\$}{\sqrt{x\$^2+y\$^2+z\$^2}} & \frac{z\$}{\sqrt{x\$^2+y\$^2+z\$^2}} \\ 0 & -\frac{x\$\, z\$}{(x\$^2+y\$^2+z\$^2)^{3/2}} & -\frac{y\$\, z\$}{(x\$^2+y\$^2+z\$^2)^{3/2}} & \frac{x\$^2+y\$^2}{(x\$^2+y\$^2+z\$^2)^{3/2}} \\ 0 & -\frac{y\$}{x\$^2+y\$^2} & \frac{x\$}{x\$^2+y\$^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ecco dunque che ottengo un tensore metrico privo di funzioni trigonometriche e di radici quadrate:

In[61]:=
```
intermedio$ = tralba$[Inverse[jatrasfocarte$], grscarte$2, {-1, -1}];
grssfer$2a =
  Simplify[intermedio$ /. x$ → trasfocarte$[[2]] /. y$ → trasfocarte$[[3]] /.
    z$ → trasfocarte$[[4]] ];
Print["grssfer$2a :=", MatrixForm[grssfer$2a]];
```

$$\text{grssfer\$2a} := \begin{pmatrix} c\$^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r\$^2}{-1+h\$^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-1+h\$^2\right) r\$^2 \end{pmatrix}$$

Una cosa interessante è inoltre che il determinante di questo tensore metrico dipende solo dalla coordinata radiale r$

In[64]:=
```
Det[grssfer$2a]
```

Out[64]= $-c\$^2\, r\$^4$

Viceversa per tornare indietro ossia per passare dalle coordinate sferiche razionali (con tensore metrico senza funzioni trigonometriche) a quelle cartesiane devo operare in questo modo:

In[65]:=
```
provvisorio$b = tralba$[Inverse[jatrasfosferi$], grssfer$2a, {-1, -1}];
grscarte$2b = Simplify[provvisorio$b /. r$ → trasfosferi$[[2]] /.
     h$ → trasfosferi$[[3]] /. p$ → trasfosferi$[[4]]];
Print["grscarte$2b :=", MatrixForm[grscarte$2b]];
```

$$\text{grscarte\$2b} := \begin{pmatrix} c\$^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con questo mi sembra di avere chiarito abbastanza come utilizzare la funzione tralba$ per fare cambiamenti di coordinate.

Soluzioni analitiche della Relatività Generale

Trascrivo qui, a scopo di TEST la metrica del buco nero carico (**Kerr-Newman**) nella forma di **Boyer- Lindquist** ... vedere a pag. 318 dell' HEL : M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby, University of Cambridge, **ISBN:9780521829519**

http://www.cambridge.org/it/knowledge/isbn/item1171086/?site_locale=it_IT

In[68]:=

```
(* r$ varia da 0 all'infinito, h$ varia da 1 a -1 e p$ varia da 0 a 2 Pi *)
$sferico1 = {t$, r$, h$, p$};
Materia$ = G$ (2 M$ r$ - Q$^2 / L$) / c$^2; Roq$ = r$^2 + (a$ h$)^2;
Delta$ = r$^2 - Materia$ + a$^2; Sigq$ = (r$^2 + a$^2)^2 - a$^2 Delta$ (1 - h$^2);
KNbl$2 = Simplify[DiagonalMatrix[{c$^2 (Delta$ - a$^2 (1 - h$^2)) / Roq$,
     -Roq$ / Delta$, -Roq$ / (1 - h$^2), -Sigq$ (1 - h$^2) / Roq$}]];
KNbl$2[[1, 4]] = a$ c$ Materia$ (1 - h$^2) / Roq$;
KNbl$2[[4, 1]] = KNbl$2[[1, 4]];
(* c$ rappresenta la velocità della luce e L$
 è un intero che deve valere esattamente 10 milioni *)
(* M$ è la massa del buco nero,
Q$ la sua carica e G$ la costante di gravitazione universale *)
Print["Componenti non nulle del tensore metrico
    covariante:\nComponente [[1,1]]\n", KNbl$2[[1, 1]]];
Print["Componente [[2,2]]\n", KNbl$2[[2, 2]]];
Print["Componente [[3,3]]\n", KNbl$2[[3, 3]]];
Print["Componente [[4,4]]\n", KNbl$2[[4, 4]]];
Print["Componente [[1,4]] ed anche [[4,1]]\n" KNbl$2[[1, 4]]];
```

Componenti non nulle del tensore metrico covariante:

Componente [[1,1]]

$$\frac{a\$^2\, c\$^2\, h\$^2\, L\$ + G\$\, Q\$^2 - 2\, G\$\, L\$\, M\$\, r\$ + c\$^2\, L\$\, r\$^2}{a\$^2\, h\$^2\, L\$ + L\$\, r\$^2}$$

Componente [[2,2]]

$$-\frac{c\$^2\, L\$\, \left(a\$^2\, h\$^2 + r\$^2\right)}{a\$^2\, c\$^2\, L\$ + c\$^2\, L\$\, r\$^2 + G\$\, \left(Q\$^2 - 2\, L\$\, M\$\, r\$\right)}$$

Componente [[3,3]]

$$\frac{a\$^2\, h\$^2 + r\$^2}{-1 + h\$^2}$$

Componente [[4,4]]

$$\frac{\left(1 - h\$^2\right) \left(-\left(a\$^2 + r\$^2\right)^2 + a\$^2\, \left(1 - h\$^2\right) \left(a\$^2 + r\$^2 + \frac{G\$\, \left(Q\$^2 - 2\, L\$\, M\$\, r\$\right)}{c\$^2\, L\$}\right)\right)}{a\$^2\, h\$^2 + r\$^2}$$

Componente [[1,4]] ed anche [[4,1]]

$$\frac{a\$\, G\$\, \left(1 - h\$^2\right) \left(-\frac{Q\$^2}{L\$} + 2\, M\$\, r\$\right)}{c\$\, \left(a\$^2\, h\$^2 + r\$^2\right)}$$

Questo è **il buco nero di tipo più generale** e noto in letteratura ma io **Lo ho scritto in modo NON tradizionale** ossia in modo da non fare uso esplicito di funzioni trigonometriche ossia con uso della variabile h$ che varia tra -1 ed 1 ed assume il valore 0 sul piano equatoriale. Ossia h$ è Cos[h] dove h rappresenta una latitudine (non geografica) che va da 0 al polo Nord a Pi = π al polo Sud e vale $\pi/2$ all'Equatore.

Notare che questo tensore metrico è migliore, dal punto di vista computazionale, anche di quello eventualmente scrivibile in coordinate "quasi" ossia "asintoticamente" cartesiane perché in quel caso bisognerebbe fare uso della radice quadrata della somma dei quadrati di x$, y$ e z$ ossia r$=Sqrt[x$^2+y^2+z^2] ma la radice quadrata è una funzione che potrebbe avere valori immaginari e questa possibilità crea molte difficoltà nella semplificazione delle espressioni con *Mathematica*.

La radice quadrata del determinante del tensore metrico svolge un ruolo importante in molte

equazioni differenziali.
In questo caso vale:

```
In[77]:= Print["Radice quadrata del determinante calcolata senza accorgimenti : ",
           Simplify[Sqrt[Abs[Det[KNbl$2]]]]];
```

Radice quadrata del determinante calcolata senza accorgimenti :
$\sqrt{\text{Abs}\left[c\$^2 \left(a\$^2 h\$^2 + r\$^2\right)^2\right]}$

Mathematica non applica esplicitamente la radice quadrata perché ignora la natura, reale o complessa, delle costanti sotto il segno di radice quadrata ma manualmente posso scrivere la formula semplicissima nonostante la complessità del tensore metrico utilizzato:

```
In[78]:= sqrtabsdet$ = c$ ((a$ h$)^2 + r$^2);
         Print[
           "sqrtabsdet$ rappresenta la radice quadrata del determinante di KNbl$2 : ",
           sqrtabsdet$];
```

sqrtabsdet$ rappresenta la radice quadrata del determinante di KNbl$2 :
$c\$ \left(a\$^2 h\$^2 + r\$^2\right)$

Ora calcolo il tensore metrico totalmente controvariante che chiamo KNbl$211.

```
In[80]:= KNbl$211 = Simplify[Inverse[KNbl$2]];
         Print["Il tensore metrico controvariante KNbl$211"];
         Print[KNbl$211]
```

Il tensore metrico controvariante KNbl$211

$$\Big\{\Big\{\left(a\$^4 c\$^2 h\$^2 L\$ + c\$^2 L\$ r\$^4 + a\$^2 \left(c\$^2 \left(1 + h\$^2\right) L\$ r\$^2 + G\$ \left(-1 + h\$^2\right) \left(Q\$^2 - 2 L\$ M\$ r\$\right)\right)\right) \Big/ \left(c\$^2 \left(a\$^2 h\$^2 + r\$^2\right) \left(a\$^2 c\$^2 L\$ + c\$^2 L\$ r\$^2 + G\$ \left(Q\$^2 - 2 L\$ M\$ r\$\right)\right)\right), 0, 0, -\left(a\$ G\$ \left(Q\$^2 - 2 L\$ M\$ r\$\right)\right) \Big/ \left(c\$ \left(a\$^2 h\$^2 + r\$^2\right) \left(a\$^2 c\$^2 L\$ + c\$^2 L\$ r\$^2 + G\$ \left(Q\$^2 - 2 L\$ M\$ r\$\right)\right)\right)\Big\},$$
$$\Big\{0, -\frac{a\$^2 c\$^2 L\$ + c\$^2 L\$ r\$^2 + G\$ \left(Q\$^2 - 2 L\$ M\$ r\$\right)}{c\$^2 L\$ \left(a\$^2 h\$^2 + r\$^2\right)}, 0, 0\Big\}, \Big\{0, 0, \frac{-1 + h\$^2}{a\$^2 h\$^2 + r\$^2}, 0\Big\},$$
$$\Big\{-\left(a\$ G\$ \left(Q\$^2 - 2 L\$ M\$ r\$\right)\right) \Big/ \left(c\$ \left(a\$^2 h\$^2 + r\$^2\right) \left(a\$^2 c\$^2 L\$ + c\$^2 L\$ r\$^2 + G\$ \left(Q\$^2 - 2 L\$ M\$ r\$\right)\right)\right), 0, 0, \left(a\$^2 c\$^2 h\$^2 L\$ + c\$^2 L\$ r\$^2 + G\$ \left(Q\$^2 - 2 L\$ M\$ r\$\right)\right) \Big/ \left(\left(-1 + h\$^2\right) \left(a\$^2 h\$^2 + r\$^2\right) \left(a\$^2 c\$^2 L\$ + c\$^2 L\$ r\$^2 + G\$ \left(Q\$^2 - 2 L\$ M\$ r\$\right)\right)\right)\Big\}\Big\}$$

Per scrivere il tensore metrico in forma più convenzionale debbo usare le funzioni sferiche classiche ossia:

```
In[83]:= $sfericoclassico1 = {t, ρ, θ, ϕ}
Out[83]= {t, ρ, θ, ϕ}
```

Le vecchie coordinate sono legate alle nuove dalla seguente legge di conversione:

```
In[84]:= nelleclassiche$1 = {t, ρ, Cos[θ], ϕ}
Out[84]= {t, ρ, Cos[θ], ϕ}
```

```
In[85]:= jacoclassiche$2 = D[nelleclassiche$1, {$sfericoclassico1}];
         Print[MatrixForm[jacoclassiche$2]];
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Sin}[\theta] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto posso calcolare il tensore metrico KNblclassico$2 usando la funzione tralba$ nel seguente modo:

```
In[86]:= precambiato = tralba$[Inverse[jacoclassiche$2], KNbl$2, {-1, -1}];
KNblclassico$2 =
  Simplify[precambiato /. t$ → nelleclassiche$1[[1]] /.
     r$ →  nelleclassiche$1[[2]] /. h$ → nelleclassiche$1[[3]]
    /. p$ →  nelleclassiche$1[[4]]];
Print["Usando sempre 1 per G$, c$, L$ ",
  "e chiamando mm la massa, qq la carica e aa lo spin"];
semplificato = KNblclassico$2 /. G$ → 1 /. c$ → 1 /. L$ →  1 /. M$ → mm /.
    a$ →  aa /. Q$ → qq;
Print[MatrixForm[semplificato]]
```

Usando sempre 1 per G$, c$, L$ e chiamando mm la massa, qq la carica e aa lo spin

$$\begin{pmatrix} \frac{qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2+aa^2\,Cos[\theta]^2}{\rho^2+aa^2\,Cos[\theta]^2} & 0 & 0 & \frac{aa\,\left(-qq^2+2\,mm\,\rho\right)\,Sin[\theta]^2}{\rho^2+aa^2\,Cos[\theta]^2} \\ 0 & -\frac{\rho^2+aa^2\,Cos[\theta]^2}{aa^2+qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2-aa^2\,Cos[\theta]^2 & 0 \\ \frac{aa\,\left(-qq^2+2\,mm\,\rho\right)\,Sin[\theta]^2}{\rho^2+aa^2\,Cos[\theta]^2} & 0 & 0 & \frac{Sin[\theta]^2\,\left(-\left(aa^2+\rho^2\right)^2+aa^2\,\left(aa^2+qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2\right)\,Sin[\theta]^2\right)}{\rho^2+aa^2\,Cos[\theta]^2} \end{pmatrix}$$

Trascrivo qui l'espressione che penso di ottenere in modo da controllare che tutto è stato fatto correttamente ossia ho usato bene la funzione tralba$

```
In[91]:= dovrebbevenire = {{1 - (-qq^2 + 2 * mm * ρ) / (ρ^2 + aa^2 * Cos[θ]^2), 0, 0,
   (aa * (-qq^2 + 2 * mm * ρ) * Sin[θ]^2) / (ρ^2 + aa^2 * Cos[θ]^2)},
  {0, (-ρ^2 - aa^2 * Cos[θ]^2) / (aa^2 + qq^2 - 2 * mm * ρ + ρ^2), 0, 0},
  {0, 0, -ρ^2 - aa^2 * Cos[θ]^2, 0}, {(aa * (-qq^2 + 2 * mm * ρ) * Sin[θ]^2) /
   (ρ^2 + aa^2 * Cos[θ]^2), 0, 0,
   (Sin[θ]^2 *
      (-(aa^2 + ρ^2)^2 + aa^2 * (aa^2 + qq^2 - 2 * mm * ρ + ρ^2) * Sin[θ]^2)) /
   (ρ^2 + aa^2 * Cos[θ]^2)}}
```

Out[91]=

$$\left\{\left\{1-\frac{-qq^2+2\,mm\,\rho}{\rho^2+aa^2\,Cos[\theta]^2},\,0,\,0,\,\frac{aa\,\left(-qq^2+2\,mm\,\rho\right)\,Sin[\theta]^2}{\rho^2+aa^2\,Cos[\theta]^2}\right\},\right.$$

$$\left\{0,\,\frac{-\rho^2-aa^2\,Cos[\theta]^2}{aa^2+qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2},\,0,\,0\right\},\,\left\{0,\,0,\,-\rho^2-aa^2\,Cos[\theta]^2,\,0\right\},$$

$$\left\{\frac{aa\,\left(-qq^2+2\,mm\,\rho\right)\,Sin[\theta]^2}{\rho^2+aa^2\,Cos[\theta]^2},\,0,\,0,\right.$$

$$\left.\left.\frac{Sin[\theta]^2\,\left(-\left(aa^2+\rho^2\right)^2+aa^2\,\left(aa^2+qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2\right)\,Sin[\theta]^2\right)}{\rho^2+aa^2\,Cos[\theta]^2}\right\}\right\}$$

```
In[92]:= Simplify[semplificato - dovrebbevenire]

Out[92]= {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

Viceversa, quando applico tralba$ ad un tensore controvariante (prendo qui come esempio il tensore KNbl$211)
devo fare tutto nello stesso modo ma ...dicendo alla funzione tralba$, di operare appunto su un tensore totalmente controvariante:

In[93]:=
```
precambiato$b = tralba$[Inverse[jacoclassiche$2], KNbl$211, {1, 1}];
KNblclassico$211 =
  Simplify[precambiato$b /. t$ → nelleclassiche$1[[1]] /.
      r$ →  nelleclassiche$1[[2]] /. h$ → nelleclassiche$1[[3]]
    /. p$ →  nelleclassiche$1[[4]]];
Print["Usando sempre 1 per G$, c$, L$ ",
  "e chiamando mm la massa, qq la carica e aa lo spin"];
semplificato$b = KNblclassico$211 /. G$ → 1 /. c$ → 1 /. L$ →  1 /. M$ → mm /.
    a$ →  aa /. Q$ → qq;
Print[MatrixForm[semplificato$b]];
```

Usando sempre 1 per G$, c$, L$ e chiamando mm la massa, qq la carica e aa lo spin

$$\begin{pmatrix} \frac{\rho^2\left(aa^2+\rho^2\right)+aa^2\left(aa^2+\rho^2\right)\text{Cos}[\theta]^2-aa^2\left(qq^2-2\,mm\,\rho\right)\text{Sin}[\theta]^2}{\left(aa^2+qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2\right)\left(\rho^2+aa^2\,\text{Cos}[\theta]^2\right)} & 0 & 0 & -\frac{aa\left(qq^2-2\,mm\,\rho\right)}{\left(aa^2+qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2\right)\left(\rho^2+aa^2\,\text{Co}\right.} \\ 0 & -\frac{aa^2+qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2}{\rho^2+aa^2\,\text{Cos}[\theta]^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2+aa^2\,\text{Cos}[\theta]^2} & 0 \\ -\frac{aa\left(qq^2-2\,mm\,\rho\right)}{\left(aa^2+qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2\right)\left(\rho^2+aa^2\,\text{Cos}[\theta]^2\right)} & 0 & 0 & -\frac{\left(qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2+aa^2\,\text{Cos}[\theta]^2\right)\text{Cs}}{\left(aa^2+qq^2-2\,mm\,\rho+\rho^2\right)\left(\rho^2+aa^2\,\text{Co}\right.} \end{pmatrix}$$

Controllo di avere ottenuto, in questo caso particolare di applicazione al tensore metrico, l'inversa della matrice e dunque:

In[98]:=
```
MatrixForm[Simplify[Dot[semplificato, semplificato$b]]]
```

Out[98]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Provo a tradurre questo tensore KNbl$2 in coordinate cartesiane:

In[99]:=
```
KNbl$2
```

Out[99]=

$$\Bigg\{\Bigg\{\frac{a\$^2\,c\$^2\,h\$^2\,L\$+G\$\,Q\$^2-2\,G\$\,L\$\,M\$\,r\$+c\$^2\,L\$\,r\$^2}{a\$^2\,h\$^2\,L\$+L\$\,r\$^2},\ 0,\ 0,\ \frac{a\$\,G\$\left(1-h\$^2\right)\left(-\frac{Q\$^2}{L\$}+2\,M\$\,r\$\right)}{c\$\left(a\$^2\,h\$^2+r\$^2\right)}\Bigg\},$$

$$\Bigg\{0,\ -\frac{c\$^2\,L\$\left(a\$^2\,h\$^2+r\$^2\right)}{a\$^2\,c\$^2\,L\$+c\$^2\,L\$\,r\$^2+G\$\left(Q\$^2-2\,L\$\,M\$\,r\$\right)},\ 0,\ 0\Bigg\},$$

$$\Bigg\{0,\ 0,\ \frac{a\$^2\,h\$^2+r\$^2}{-1+h\$^2},\ 0\Bigg\},\ \Bigg\{\frac{a\$\,G\$\left(1-h\$^2\right)\left(-\frac{Q\$^2}{L\$}+2\,M\$\,r\$\right)}{c\$\left(a\$^2\,h\$^2+r\$^2\right)},\ 0,\ 0,$$

$$\frac{\left(1-h\$^2\right)\left(-\left(a\$^2+r\$^2\right)^2+a\$^2\left(1-h\$^2\right)\left(a\$^2+r\$^2+\frac{G\$\left(Q\$^2-2\,L\$\,M\$\,r\$\right)}{c\$^2\,L\$}\right)\right)}{a\$^2\,h\$^2+r\$^2}\Bigg\}\Bigg\}$$

TUTTAVIA OGNI ROSA HA LE SUE SPINE ! :-(

Qui sono riuscito a far fare i calcoli a *Mathematica* 9 solo annullando la massa ossia solo nel caso di un buco nero dotato di carica e spin , come, grossolanamente potrebbe essere un elettrone o un quark a patto di considerare TRASCURABILISSIME LE LORO MASSE come cause di deformazione della metrica.

In[100]:=

```
If[lofaccio,
 ris = Timing[parziale$b = tralba$[
     Transpose[jatrasfosferi$], Simplify[KNbl$2  /. M$ → 0 ], {1, 1}]];
 Print["Secondi impiegati al primo passo := ", ris[[1]]];
 ris =
  Timing[KNblcarte$2 = FullSimplify[parziale$b /. r$ → trasfosferi$[[2]] /.
       h$ → trasfosferi$[[3]] /. p$ → trasfosferi$[[4]]]];
 Print["Secondi impiegati al secondo passo := ", ris[[1]]];]
```

Se lo fa ci mette dunque quasi tre minuti !

In[101]:=

```
If[lofaccio, ris = Timing[
   parziale$c = tralba$[Transpose[jatrasfocarte$], KNblcarte$2, {1, 1}]];
 Print["Secondi impiegati a questo primo passo := ", ris[[1]]];
 ris = Timing[KNbl$2bis = Simplify[parziale$c /. x$ → trasfocarte$[[2]] /.
       y$ → trasfocarte$[[3]] /. z$ →  trasfocarte$[[4]] ]];
 Print["Secondi impiegati per questo secondo passo := ", ris[[1]]];
 Print["KNbl$2bis :=", MatrixForm[KNbl$2bis]];]
```

Dunque, se lo ha fatto ha impiegato quasi 7 minuti per fare il primo passo e 9 secondi per fare il secondo...

E fortuna che ho considerato una metrica in cui non compaiono radici quadrate ! Insomma, questo calcolo mi sembra al limite delle attuali capacità di *Mathematica*...

In[102]:=

```
If[lofaccio, Print[Simplify[KNbl$2bis - KNbl$2 /. M$ → 0]]];
```

Ora cerco di scrivere in modo compatto la metrica cartesiana senza massa ma con solo carica e spin...

In[103]:=

```
g11 = (G$ rq$ Q$^2 + c$^2 L$ ((a$ z$)^2 + rq$^2)) / (L$ ((a$ z$)^2 + rq$^2));
Print[g11];
If[lofaccio, Print[KNblcarte$2 [[1, 1]] - (g11 /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2)]];
```

$$\frac{\text{G\$ Q\$}^2\ \text{rq\$} + \text{c\$}^2\ \text{L\$}\ \left(\text{rq\$}^2 + \text{a\$}^2\ \text{z\$}^2\right)}{\text{L\$}\ \left(\text{rq\$}^2 + \text{a\$}^2\ \text{z\$}^2\right)}$$

In[106]:=

```
g12 = a$ y$ G$ Q$^2 / (c$ L$ ((a$ z$)^2 + rq$^2));
Print[g12];
If[lofaccio, Print[KNblcarte$2 [[1, 2]] - (g12 /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2)]];
```

$$\frac{\text{a\$ G\$ Q\$}^2\ \text{y\$}}{\text{c\$ L\$}\ \left(\text{rq\$}^2 + \text{a\$}^2\ \text{z\$}^2\right)}$$

In[109]:=

```
g13 = -a$ x$ G$ Q$^2 / (c$ L$ ((a$ z$)^2 + rq$^2));
Print[g13];
If[lofaccio, Print[KNblcarte$2 [[1, 3]] - (g13 /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2)]];
```

$$-\frac{\text{a\$ G\$ Q\$}^2\ \text{x\$}}{\text{c\$ L\$}\ \left(\text{rq\$}^2 + \text{a\$}^2\ \text{z\$}^2\right)}$$

In[112]:=

```
g14 = 0;
Print[g14];
If[lofaccio, Print[KNblcarte$2 [[1, 4]] - (g14 /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2)]];
```

0

```
In[115]:= g22a = - (x$ z$) ^2 ((a$ z$) ^2 + rq$^2) / (rq$^3 (rq$ - z$^2));
g22b =
  -L$ c$^2 x$^2 rq$ ((a$ z$) ^2 + rq$^2) / (rq$^3 (G$ Q$^2 + c$^2 L$ (a$^2 + rq$)));
g22c = (y$^2 ((a$^2 + rq$) / (-rq$ + z$^2) +
      (a$^2 G$ Q$^2) / (c$^2 L$ (rq$^2 + (a$ z$) ^2)))) / rq$;
g22 = g22a + g22b + g22c;
Print[g22];
If[lofaccio,
  Print[Simplify[ KNblcarte$2 [[2, 2]] - (g22 /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2) ]]];
```

$$-\frac{c\$^2\,L\$\,x\$^2\,\left(rq\$^2+a\$^2\,z\$^2\right)}{rq\$^2\,\left(G\$\,Q\$^2+c\$^2\,L\$\,\left(a\$^2+rq\$\right)\right)}-\frac{x\$^2\,z\$^2\,\left(rq\$^2+a\$^2\,z\$^2\right)}{rq\$^3\,\left(rq\$-z\$^2\right)}+\frac{y\$^2\,\left(\frac{a\$^2+rq\$}{-rq\$+z\$^2}+\frac{a\$^2\,G\$\,Q\$^2}{c\$^2\,L\$\,\left(rq\$^2+a\$^2\,z\$^2\right)}\right)}{rq\$}$$

```
In[121]:= g23 = (x$ y$ ((rq$ (a$^4 c$^2 L$ + G$ Q$^2 rq$ + a$^2 (G$ * Q$^2 + 2 c$^2 L$ rq$))) /
        (G$ Q$^2 + c$^2 L$ (a$^2 + rq$)) +
      (a$^2 (a$^2 c$^2 L$ + G$ Q$^2) z$^2) / (G$ Q$^2 + c$^2 L$ (a$^2 + rq$)) -
  (a$^2 G$ Q$^2 rq$^2) / (c$^2 L$ (rq$^2 + a$^2 z$^2)))) / rq$^3;
Print[g23];
If[lofaccio,
  Print[Simplify[KNblcarte$2 [[2, 3]] - (g23 /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2)]]];
```

$$\frac{x\$\,y\$\,\left(\frac{rq\$\,\left(a\$^4\,c\$^2\,L\$+G\$\,Q\$^2\,rq\$+a\$^2\,\left(G\$\,Q\$^2+2\,c\$^2\,L\$\,rq\$\right)\right)}{G\$\,Q\$^2+c\$^2\,L\$\,\left(a\$^2+rq\$\right)}+\frac{a\$^2\,\left(a\$^2\,c\$^2\,L\$+G\$\,Q\$^2\right)\,z\$^2}{G\$\,Q\$^2+c\$^2\,L\$\,\left(a\$^2+rq\$\right)}-\frac{a\$^2\,G\$\,Q\$^2\,rq\$^2}{c\$^2\,L\$\,\left(rq\$^2+a\$^2\,z\$^2\right)}\right)}{rq\$^3}$$

```
In[124]:= g24 = x$ z$ ((a$ z$) ^2 + rq$^2)
    ((a$ c$) ^2 L$ + G$ Q$^2) / (rq$^3 (G$ Q$^2 + L$ c$^2 (a$^2 + rq$)));
Print[FullSimplify[g24]];
If[lofaccio,
  Print[Simplify[KNblcarte$2 [[2, 4]] - (g24 /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2)]]];
```

$$\frac{\left(a\$^2\,c\$^2\,L\$+G\$\,Q\$^2\right)\,x\$\,z\$\,\left(rq\$^2+a\$^2\,z\$^2\right)}{rq\$^3\,\left(G\$\,Q\$^2+c\$^2\,L\$\,\left(a\$^2+rq\$\right)\right)}$$

```
In[127]:= g33a = -y$^2 z$^2 ((a$ z$) ^2 + rq$^2) / (rq$^3 (rq$ - z$^2));
g33b =
  -L$ c$^2 y$^2 ( (a$ z$) ^2 + rq$^2) / (rq$^2 (G$ Q$^2 + L$ c$^2 (a$^2 + rq$)));
g33c = (x$^2 * ((-a$^4) * c$^2 * L$ * z$^2 - c$^2 * L$ * rq$^3 +
      a$^2 * (G$ * Q$^2 * (rq$ - z$^2) - c$^2 * L$ * rq$ * (rq$ + z$^2)))) /
  (c$^2 * L$ * (rq$ - z$^2) * rq$ * (a$^2 * z$^2 + rq$^2));
g33 = g33a + g33b + g33c;
Print[g33a];
Print[g33b];
Print[g33c];
If[lofaccio,
  Print[FullSimplify[KNblcarte$2 [[3, 3]] - (g33 /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2)]]];
```

$$-\frac{y\$^2\,z\$^2\,\left(rq\$^2+a\$^2\,z\$^2\right)}{rq\$^3\,\left(rq\$-z\$^2\right)}$$

$$-\frac{c\$^2\,L\$\,y\$^2\,\left(rq\$^2+a\$^2\,z\$^2\right)}{rq\$^2\,\left(G\$\,Q\$^2+c\$^2\,L\$\,\left(a\$^2+rq\$\right)\right)}$$

$$\frac{x\$^2\,\left(-c\$^2\,L\$\,rq\$^3-a\$^4\,c\$^2\,L\$\,z\$^2+a\$^2\,\left(G\$\,Q\$^2\,\left(rq\$-z\$^2\right)-c\$^2\,L\$\,rq\$\,\left(rq\$+z\$^2\right)\right)\right)}{c\$^2\,L\$\,rq\$\,\left(rq\$-z\$^2\right)\,\left(rq\$^2+a\$^2\,z\$^2\right)}$$

```
In[135]:= g34 = y$ z$ (L$ (a$ c$) ^2 + G$ Q$^2)
              ((a$ z$) ^2 + rq$^2) / (rq$^3 (G$ Q$^2 + L$ c$^2 (a$^2 + rq$)));
          Printg[g34];
          If[lofaccio,
            Print[Simplify[KNblcarte$2 [[3, 4]] - (g34 /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2)]]];

In[138]:= g44 = - ((a$ z$) ^2 + rq$^2) ((L$ ( a$ c$) ^2 + G$ Q$^2) (rq$ - z$^2) + L$ c$^2 rq$^2) /
               (rq$^3 (G$ Q$^2 + L$ c$^2 (a$^2 + rq$)));
          Print[g44];
          If[lofaccio,
            Print[Simplify[ KNblcarte$2 [[4, 4]] - (g44 /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2)]]];
```

$$\frac{\left(-\mathrm{rq\$}^2-\mathrm{a\$}^2\,\mathrm{z\$}^2\right)\left(\mathrm{c\$}^2\,\mathrm{L\$}\,\mathrm{rq\$}^2+\left(\mathrm{a\$}^2\,\mathrm{c\$}^2\,\mathrm{L\$}+\mathrm{G\$}\,\mathrm{Q\$}^2\right)\left(\mathrm{rq\$}-\mathrm{z\$}^2\right)\right)}{\mathrm{rq\$}^3\left(\mathrm{G\$}\,\mathrm{Q\$}^2+\mathrm{c\$}^2\,\mathrm{L\$}\left(\mathrm{a\$}^2+\mathrm{rq\$}\right)\right)}$$

```
In[141]:= ris = Timing[ggg = FullSimplify[{{g11, g12, g13, g14},
                {g12, g22, g23, g24}, {g13, g23, g33, g34}, {g14, g24, g34, g44}}]];
          Print["Secondi impiegati := ", ris[[1]]];
          Print["primariga \n", ggg[[1]]];
          Print["secondariga \n", ggg[[2]]];
          Print["terzariga \n", ggg[[3]]];
          Print["quartariga \n", ggg[[4]]];
```

```
Secondi impiegati := 4.149627
```

primariga

$$\left\{c\$^2+\frac{G\$\ Q\$^2\ rq\$}{L\$\ rq\$^2+a\$^2\ L\$\ z\$^2},\ \frac{a\$\ G\$\ Q\$^2\ y\$}{c\$\ L\$\ rq\$^2+a\$^2\ c\$\ L\$\ z\$^2},\ -\frac{a\$\ G\$\ Q\$^2\ x\$}{c\$\ L\$\ rq\$^2+a\$^2\ c\$\ L\$\ z\$^2},\ 0\right\}$$

secondariga

$$\left\{\frac{a\$\ G\$\ Q\$^2\ y\$}{c\$\ L\$\ rq\$^2+a\$^2\ c\$\ L\$\ z\$^2},\right.$$

$$\frac{\frac{a\$^2\ G\$\ Q\$^2\ rq\$^2\ y\$^2}{c\$^2\ L\$\ (rq\$^2+a\$^2\ z\$^2)}-\frac{c\$^2\ L\$\ rq\$\ x\$^2\ (rq\$^2+a\$^2\ z\$^2)}{G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$)}-\frac{rq\$^2\ (a\$^2+rq\$)\ y\$^2+rq\$^2\ x\$^2\ z\$^2+a\$^2\ x\$^2\ z\$^4}{rq\$-z\$^2}}{rq\$^3},$$

$$\frac{x\$\ y\$\left(\frac{rq\$\ (a\$^4\ c\$^2\ L\$+G\$\ Q\$^2\ rq\$+a\$^2\ (G\$\ Q\$^2+2\ c\$^2\ L\$\ rq\$))}{G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$)}+\frac{a\$^2\ (a\$^2\ c\$^2\ L\$+G\$\ Q\$^2)\ z\$^2}{G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$)}-\frac{a\$^2\ G\$\ Q\$^2\ rq\$^2}{c\$^2\ L\$\ (rq\$^2+a\$^2\ z\$^2)}\right)}{rq\$^3},$$

$$\left.\frac{(a\$^2\ c\$^2\ L\$+G\$\ Q\$^2)\ x\$\ z\$\ (rq\$^2+a\$^2\ z\$^2)}{rq\$^3\ (G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$))}\right\}$$

terzariga

$$\left\{-\frac{a\$\ G\$\ Q\$^2\ x\$}{c\$\ L\$\ rq\$^2+a\$^2\ c\$\ L\$\ z\$^2},\right.$$

$$\frac{x\$\ y\$\left(\frac{rq\$\ (a\$^4\ c\$^2\ L\$+G\$\ Q\$^2\ rq\$+a\$^2\ (G\$\ Q\$^2+2\ c\$^2\ L\$\ rq\$))}{G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$)}+\frac{a\$^2\ (a\$^2\ c\$^2\ L\$+G\$\ Q\$^2)\ z\$^2}{G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$)}-\frac{a\$^2\ G\$\ Q\$^2\ rq\$^2}{c\$^2\ L\$\ (rq\$^2+a\$^2\ z\$^2)}\right)}{rq\$^3},$$

$$\frac{\frac{a\$^2\ G\$\ Q\$^2\ rq\$^2\ x\$^2}{c\$^2\ L\$\ (rq\$^2+a\$^2\ z\$^2)}-\frac{c\$^2\ L\$\ rq\$\ y\$^2\ (rq\$^2+a\$^2\ z\$^2)}{G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$)}-\frac{rq\$^2\ (a\$^2+rq\$)\ x\$^2+rq\$^2\ y\$^2\ z\$^2+a\$^2\ y\$^2\ z\$^4}{rq\$-z\$^2}}{rq\$^3},$$

$$\left.\frac{(a\$^2\ c\$^2\ L\$+G\$\ Q\$^2)\ y\$\ z\$\ (rq\$^2+a\$^2\ z\$^2)}{rq\$^3\ (G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$))}\right\}$$

quartariga

$$\left\{0,\ \frac{(a\$^2\ c\$^2\ L\$+G\$\ Q\$^2)\ x\$\ z\$\ (rq\$^2+a\$^2\ z\$^2)}{rq\$^3\ (G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$))},\ \frac{(a\$^2\ c\$^2\ L\$+G\$\ Q\$^2)\ y\$\ z\$\ (rq\$^2+a\$^2\ z\$^2)}{rq\$^3\ (G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$))},\right.$$

$$\left.((-rq\$^2-a\$^2\ z\$^2)\ (c\$^2\ L\$\ rq\$^2+(a\$^2\ c\$^2\ L\$+G\$\ Q\$^2)\ (rq\$-z\$^2)))\ /\ (rq\$^3\ (G\$\ Q\$^2+c\$^2\ L\$\ (a\$^2+rq\$)))\right\}$$

Faccio la verifica globale ...

```
In[147]:= If[lofaccio, Print[Simplify[KNblcarte$2 - (ggg /. rq$ → x$^2 + y$^2 + z$^2)]]];
```

Insomma , questo test fatto considerando nulla la massa del buco nero vale soprattutto come prova del funzionamento della funzione tralba$ ma sarebbe stato molto più interessante poter ricavare per pure semplificazioni l’espressione del buco nero di Kerr Newman nella metrica di Boyer- Lindquist ma NON in coordinate sferiche bensì in coordinate asintoticamente (lontano dal buco) cartesiane.

Non dedico qui molti sforzi per ora a risolvere questo problema ma se qualcuno riuscisse a far fare a *Mathematica* questi calcoli in tempi (ore) ragionevoli ...farebbe una bella cosa...

Per curiosità provo a vedere quanto tempo impiega a calcolare il tensore metrico controvariante...

In[148]:=
```
ris = Timing[uggg = FullSimplify[Inverse[ggg]]];
Print["Secondi impiegati := ", ris[[1]]];
Print["primariga \n", uggg[[1]]];
Print["secondariga \n", uggg[[2]]];
Print["terzariga \n", uggg[[3]]];
Print["quartariga \n", uggg[[4]]];
```

Secondi impiegati := 4.102826

primariga

$$\left\{\frac{1-\frac{G\$\, Q\$^2\, rq\$\, \left(a\$^2+rq\$\right)}{\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\, \left(a\$^2+rq\$\right)\right)\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)}}{c\$^2}, \frac{a\$\, G\$\, Q\$^2\, rq\$\, y\$\, \left(rq\$-z\$^2\right)}{c\$\, \left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\, \left(a\$^2+rq\$\right)\right)\left(x\$^2+y\$^2\right)\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)}, \frac{a\$\, G\$\, Q\$^2\, rq\$\, x\$\, \left(-rq\$+z\$^2\right)}{c\$\, \left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\, \left(a\$^2+rq\$\right)\right)\left(x\$^2+y\$^2\right)\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)}, 0\right\}$$

secondariga

$$\left\{\frac{a\$\, G\$\, Q\$^2\, rq\$\, y\$\, \left(rq\$-z\$^2\right)}{c\$\, \left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\, \left(a\$^2+rq\$\right)\right)\left(x\$^2+y\$^2\right)\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)},\right.$$
$$-\left(\left(rq\$-z\$^2\right)\left(rq\$\left(\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\left(a\$^2+rq\$\right)\right)^2 x\$^2+c\$^2\, L\$\, rq\$\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\, rq\$\right) y\$^2\right)-\left(\left(a\$^2\, c\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2\right)\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\left(a\$^2+rq\$\right)\right) x\$^2-a\$^2\, c\$^4\, L\$^2\, rq\$\, y\$^2\right) z\$^2\right)\right) \Big/$$
$$\left(c\$^2\, L\$\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\left(a\$^2+rq\$\right)\right)\left(x\$^2+y\$^2\right)^2\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)\right),$$
$$-\frac{\left(\left(a\$^2\, c\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2\right)^2+c\$^2\, L\$\left(2\, a\$^2\, c\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2\right) rq\$\right) x\$\, y\$\left(rq\$-z\$^2\right)^2}{c\$^2\, L\$\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\left(a\$^2+rq\$\right)\right)\left(x\$^2+y\$^2\right)^2\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)},$$
$$\left.\frac{\left(a\$^2\, c\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2\right) x\$\, z\$\left(-rq\$+z\$^2\right)}{c\$^2\, L\$\left(x\$^2+y\$^2\right)\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)}\right\}$$

terzariga

$$\left\{\frac{a\$\, G\$\, Q\$^2\, rq\$\, x\$\, \left(-rq\$+z\$^2\right)}{c\$\, \left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\, \left(a\$^2+rq\$\right)\right)\left(x\$^2+y\$^2\right)\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)},\right.$$
$$-\frac{\left(\left(a\$^2\, c\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2\right)^2+c\$^2\, L\$\left(2\, a\$^2\, c\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2\right) rq\$\right) x\$\, y\$\left(rq\$-z\$^2\right)^2}{c\$^2\, L\$\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\left(a\$^2+rq\$\right)\right)\left(x\$^2+y\$^2\right)^2\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)},$$
$$-\left(\left(rq\$-z\$^2\right)\left(rq\$\left(c\$^2\, L\$\, rq\$\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\, rq\$\right) x\$^2+\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\left(a\$^2+rq\$\right)\right)^2 y\$^2\right)-\left(-a\$^2\, c\$^4\, L\$^2\, rq\$\, x\$^2+\left(a\$^2\, c\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2\right)\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\left(a\$^2+rq\$\right)\right) y\$^2\right) z\$^2\right)\right) \Big/$$
$$\left(c\$^2\, L\$\left(G\$\, Q\$^2+c\$^2\, L\$\left(a\$^2+rq\$\right)\right)\left(x\$^2+y\$^2\right)^2\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)\right),$$
$$\left.\frac{\left(a\$^2\, c\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2\right) y\$\, z\$\left(-rq\$+z\$^2\right)}{c\$^2\, L\$\left(x\$^2+y\$^2\right)\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)}\right\}$$

quartariga

$$\left\{0, \frac{\left(a\$^2\, c\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2\right) x\$\, z\$\left(-rq\$+z\$^2\right)}{c\$^2\, L\$\left(x\$^2+y\$^2\right)\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)},\right.$$
$$\left.\frac{\left(a\$^2\, c\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2\right) y\$\, z\$\left(-rq\$+z\$^2\right)}{c\$^2\, L\$\left(x\$^2+y\$^2\right)\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)}, -\frac{G\$\, Q\$^2\, z\$^2+c\$^2\, L\$\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)}{c\$^2\, L\$\left(rq\$^2+a\$^2\, z\$^2\right)}\right\}$$

CONSIDERIAMO QUESTIONI MOLTO PIU’ IMPORTANTI....

Prendiamo un vettore a caso... non troppo a caso ossia quello che useremo come potenziale vettore covariante del campo elettromagnetico:

```
In[154]:= A$1 = {Q$ c$^2 r$ / (L$ ( r$^2 + (a$ h$) ^2 )),
   0, 0, -Q$ c$ r$ a$ (1 - h$^2) / (L$ ( r$^2 + (a$ h$) ^2 ))}; Print["A$1 := ", A$1]
```

$$\text{A\$1 := }\left\{\frac{\text{c\$}^2\,\text{Q\$ r\$}}{\text{L\$}\left(\text{a\$}^2\,\text{h\$}^2+\text{r\$}^2\right)},\ 0,\ 0,\ -\frac{\text{a\$ c\$}\left(1-\text{h\$}^2\right)\text{Q\$ r\$}}{\text{L\$}\left(\text{a\$}^2\,\text{h\$}^2+\text{r\$}^2\right)}\right\}$$

```
In[155]:= precambiato$1 = tralba$[Inverse[jacoclassiche$2], A$1, {-1}];
Aclassico$1 =
  Simplify[precambiato$1 /. t$ → nelleclassiche$1[[1]] /.
      r$ →  nelleclassiche$1[[2]] /. h$ → nelleclassiche$1[[3]]
    /. p$ →  nelleclassiche$1[[4]]];
Print["Usando sempre 1 per G$, c$, L$ ",
  "e chiamando mm la massa, qq la carica e aa lo spin"];
semplificato$a = Aclassico$1 /. G$ → 1 /. c$ → 1 /. L$ →  1 /. M$ → mm /.
    a$ →  aa /. Q$ → qq;
Print[MatrixForm[semplificato$a]]
```

```
Usando sempre 1 per G$, c$, L$ e chiamando mm la massa, qq la carica e aa lo spin
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\text{qq}\,\rho}{\rho^2+\text{aa}^2\,\text{Cos}[\theta]^2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\text{aa qq}\,\rho\,\text{Sin}[\theta]^2}{\rho^2+\text{aa}^2\,\text{Cos}[\theta]^2} \end{pmatrix}$$

In questo caso e data questa particolare conversione l'azione di tralba$ è stata praticamente inesistente a parte la sostituzione dei simboli.

Se annullo a$ ottengo il buco nero carico ma non ruotante ossia non dotato di spin ossia quello di **Reissner-Nordström** che chiamo grn$2:

```
In[160]:= grn$2 = Simplify[KNbl$2 /. a$ → 0];
Print[MatrixForm[grn$2 ]];
```

$$\begin{pmatrix} \text{c\$}^2+\frac{\text{G\$}\left(\text{Q\$}^2-2\,\text{L\$ M\$ r\$}\right)}{\text{L\$ r\$}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\text{c\$}^2\,\text{L\$ r\$}^2}{\text{c\$}^2\,\text{L\$ r\$}^2+\text{G\$}\left(\text{Q\$}^2-2\,\text{L\$ M\$ r\$}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{r\$}^2}{-1+\text{h\$}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-1+\text{h\$}^2\right)\text{r\$}^2 \end{pmatrix}$$

Se annullo a$ e Q$ ottengo il buco nero neutro ossia il notissimo buco nero di **Schwarzschild** :

```
In[162]:= Print[MatrixForm[Simplify[KNbl$2 /. a$ → 0 /. Q$ → 0] ]];
```

$$\begin{pmatrix} \text{c\$}^2-\frac{2\,\text{G\$ M\$}}{\text{r\$}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{c\$}^2\,\text{r\$}}{2\,\text{G\$ M\$}-\text{c\$}^2\,\text{r\$}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{r\$}^2}{-1+\text{h\$}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-1+\text{h\$}^2\right)\text{r\$}^2 \end{pmatrix}$$

Se infine annullo anche la massa M$ ottengo la metrica pseudoeuclidea...

In[163]:=
```
Print[MatrixForm[Simplify[KNbl$2 /. a$ → 0 /. Q$ → 0 /. M$ → 0] ]];
```

$$\begin{pmatrix} c\$^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r\$^2}{-1+h\$^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-1+h\$^2\right) r\$^2 \end{pmatrix}$$

Ora calcolo l'invariante quadratico del tensore di Riemann ossia lo scalare di **Kretschmann** :
Notare la ridottissima durata del tempo di calcolo, meno di 4 secondi il tensore di Riemann e meno di 6 secondi lo scalare di Kretschmann sul mio VAIO SONY !
Notevole il progresso delle prestazioni dal risultato pubblicato da Richard Conn Henry :

http://it.wikipedia.org/wiki/Astrophysical_Journal

http://arxiv.org/abs/astro-ph/9912320

http://iopscience.iop.org/0004-637X/535/1/350/

I have derived the Kretschmann scalar for a general black hole of mass m, angular momentum per unit mass a, and electric charge Q. The Kretschmann scalar gives the amount of curvature of spacetime, as a function of position near (and within) a black hole. This allows one to display the "appearance" of the black hole itself, whether the black hole is merely of stellar mass or is a super-massive black hole at the center of an active galaxy. Schwarzschild black holes, rotating black holes, electrically charged black holes, and rotating electrically charged black holes are all illus-trated. Rotating black holes are discovered to possess a negative curvature that is not analogous to that of a saddle.

In[164]:=
```
xQuesto$dura = Timing[xRhel$4 = FaRiemann$4[KNbl$2, $sferico1];];
Print[
  "Il calcolo del tensore di Riemann in forma totalmente covariante è ",
  xQuesto$dura[[1]]];
xQuanto$dur = Timing[xinqhel$0 = Simplify[FainvaTotale$[xRhel$4, KNbl$2]]];
Print["L'invariante quadratico è :", Simplify[xinqhel$0],
  "\nIl Tempo impiegato a calcolarlo, in secondi, è stato ",
  xQuanto$dur[[1]], " secondi"];
```

Il calcolo del tensore di Riemann in forma totalmente covariante è 3.868825

L'invariante quadratico è :
$$-\frac{1}{c\$^4\, L\$^2 \left(a\$^2 h\$^2 + r\$^2\right)^6} 8\, G\$^2 \left(6\, a\$^6 h\$^6 L\$^2 M\$^2 + a\$^4 h\$^4 \left(-7\, Q\$^4 + 60\, L\$\, M\$\, Q\$^2\, r\$ - 90\, L\$^2 M\$^2 r\$^2\right) + r\$^4 \left(-7\, Q\$^4 + 12\, L\$\, M\$\, Q\$^2\, r\$ - 6\, L\$^2 M\$^2 r\$^2\right) + 2\, a\$^2 h\$^2 r\$^2 \left(17\, Q\$^4 - 60\, L\$\, M\$\, Q\$^2\, r\$ + 45\, L\$^2 M\$^2 r\$^2\right)\right)$$

Il Tempo impiegato a calcolarlo, in secondi, è stato 5.382034 secondi

L'invariante quadratico, con una notazione più concisa ossia senza usare il carattere $ ed indicando con £ l' intero 10000000 e con ç la velocità della luce 299792458 e viceversa con $ il Cos[h], lo posso scrivere anche così:

In[168]:=
```
test0 = (8 * G^2 * (Q^4 * (7 * r^4 - 34 * a^2 * r^2 * $^2 + 7 * a^4 * $^4) -
      12 * M * Q^2 * r * (r^4 - 10 * a^2 * r^2 * $^2 + 5 * a^4 * $^4) *
    £ + 6 * M^2 * (r^6 - 15 * a^2 * r^4 * $^2 + 15 * a^4 * r^2 * $^4 - a^6 * $^6) * £^2)) /
  (ç^4 * (r^2 + a^2 * $^2)^6 * £^2)
```

Out[168]=
$$\frac{1}{ç^4 \left(r^2 + a^2\, \$^2\right)^6 £^2} 8\, G^2 \left(Q^4 \left(7\, r^4 - 34\, a^2\, r^2\, \$^2 + 7\, a^4\, \$^4\right) - 12\, M\, Q^2\, r \left(r^4 - 10\, a^2\, r^2\, \$^2 + 5\, a^4\, \$^4\right) £ + 6\, M^2 \left(r^6 - 15\, a^2\, r^4\, \$^2 + 15\, a^4\, r^2\, \$^4 - a^6\, \$^6\right) £^2\right)$$

Convertendolo nell'altro stile ottengo:

In[169]:=
```
test$0 = FullSimplify[
  test0  /. $ → h$ /. a → a$ /. r → r$ /. £ → L$ /. M → M$  /. G → G$  /.
   Q → Q$  /. ç → c$ ]
```

Out[169]=
$$\left(8\,G\$^2\left(-12\,L\$\,M\$\,Q\$^2\,r\$\left(5\,a\$^4\,h\$^4-10\,a\$^2\,h\$^2\,r\$^2+r\$^4\right)+Q\$^4\left(7\,a\$^4\,h\$^4-34\,a\$^2\,h\$^2\,r\$^2+7\,r\$^4\right)+6\,L\$^2\,M\$^2\left(-a\$^6\,h\$^6+15\,a\$^4\,h\$^4\,r\$^2-15\,a\$^2\,h\$^2\,r\$^4+r\$^6\right)\right)\right)\Big/\left(c\$^4\,L\$^2\left(a\$^2\,h\$^2+r\$^2\right)^6\right)$$

E verifico che le due formule coincidono....

In[170]:=
```
Print["Deve valere zero : ", Simplify[xinqhel$0 - test$0]];
```

```
Deve valere zero : 0
```

Se annullo il valore di a$, l'invariante quadratico della metrica di Reissner-Nordström diventa molto più semplice:

In[171]:=
```
Print[Simplify[xinqhel$0 /. a$ → 0 ]];
```

$$\frac{8\,G\$^2\left(7\,Q\$^4-12\,L\$\,M\$\,Q\$^2\,r\$+6\,L\$^2\,M\$^2\,r\$^2\right)}{c\$^4\,L\$^2\,r\$^8}$$

Se invece annullo la carica Q$ ma accetto a$ ossia nella metrica di Kerr, ottengo:

In[172]:=
```
Print[Simplify[xinqhel$0 /. Q$ → 0 ]];
```

$$-\frac{48\,G\$^2\,M\$^2\left(a\$^6\,h\$^6-15\,a\$^4\,h\$^4\,r\$^2+15\,a\$^2\,h\$^2\,r\$^4-r\$^6\right)}{c\$^4\left(a\$^2\,h\$^2+r\$^2\right)^6}$$

Se annullo sia a$ che Q$ ossia uso la metrica di Schwarzschild, la formula dell'invariante quadratico diventa semplicissima:

In[173]:=
```
Print[Simplify[xinqhel$0 /. Q$ → 0  /. a$ → 0]];
```

$$\frac{48\,G\$^2\,M\$^2}{c\$^4\,r\$^6}$$

In conclusione questo modo di scrivere la metrica del buco nero dotato di massa, carica e spin è molto efficiente perché oltretutto evita l'uso di funzioni trigonometriche e quindi permette di fare semplificazioni simboliche e calcoli numerici in modo molto più veloce...

Una verifica tra i due modi di calcolare il tensore di Riemann

In[174]:=
```
Timing[primamaniera = FaRiemann$41[KNbl$2, $sferico1];]
```

Out[174]= {8.190053, Null}

In[175]:=
```
Timing[secondamaniera = FaRiemann$4[KNbl$2, $sferico1];]
```

Out[175]= {3.790824, Null}

In[176]:=
```
Timing[Simplify[Dot[KNbl$2, primamaniera] - secondamaniera]]
```

Out[176]=
```
{0.546003, {{{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}},
   {{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}},
   {{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}},
   {{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
    {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}}}
```

Applica la funzione di scambio col primo o con l'ultimo indice:

In[177]:=
```
permutata = Scambio$[3, primamaniera];
Print[MatrixForm[primamaniera - Scambio$[3, permutata]]];
permutata = Scambio$[primamaniera, 2];
Print[MatrixForm[primamaniera - Scambio$[permutata, 2]]];
```

$$\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

Campo elettrostatico (questi sono i calcoli più interessanti...)

Vedere la pag. in rete seguente:

http://www.elegio.it/mc2/Ricci-Riemann-1.html

Prima di tutto dimostro la correttezza della metrica del buco nero carico ma non ruotante ossia la metrica di **Reissner-Nordström**:

Riscrivo la metrica del buco ner carico senza spin: Metrica grn$2 (di Reissner-Nordström) :

In[180]:=
```
Print["Metrica di Reissner-Nordström"];
Print[ MatrixForm[grn$2],
  "\nUso le variabili del vettore $sferico1 : \n ", $sferico1];
```

Metrica di Reissner-Nordström

$$\begin{pmatrix} c\$^2 + \frac{G\$\left(Q\$^2-2\,L\$\,M\$\,r\$\right)}{L\$\,r\$^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c\$^2\,L\$\,r\$^2}{c\$^2\,L\$\,r\$^2+G\$\left(Q\$^2-2\,L\$\,M\$\,r\$\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r\$^2}{-1+h\$^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-1+h\$^2\right) r\$^2 \end{pmatrix}$$

Uso le variabili del vettore $sferico1 :
 {t$, r$, h$, p$}

Il potenziale vettore (in forma covariante) valido per questa metrica è il seguente:

In[182]:=
```
potenzialevettore1 = {Q$ c$^2 / (L$ r$), 0, 0, 0}
```

Out[182]= $\left\{\frac{c\$^2\,Q\$}{L\$\,r\$},\ 0,\ 0,\ 0\right\}$

Solo per curiosità... questo stesso potenziale ma in forma controvariante vale:

In[183]:=
```
potenzialevettore11 = Simplify[Inverse[grn$2].potenzialevettore1]
```

Out[183]= $\left\{\frac{c\$^2\,Q\$\,r\$}{c\$^2\,L\$\,r\$^2+G\$\left(Q\$^2-2\,L\$\,M\$\,r\$\right)},\ 0,\ 0,\ 0\right\}$

Come si vede è una espressione molto complicata per cui, anche per ragioni di semplicità dell'e-spressione ma anche per ragioni molto serie, è bene usare il vettore covariante e non quello controvariante.

Dal potenziale vettore in forma covariante è possibile dedurre il tensore del campo elettromagnetico senza bisogno di specificare il tensore metrico ma solo le variabili della metrica utilizzata (in questo caso, se la costante di gravitazione universale G$ fosse nulla, sarebbero le classiche coordinate sferiche della metrica pseudoeuclidea):

In[184]:=
```
Campoelettrico2 = Facampoelettrico$2[potenzialevettore1, $sferico1];
Print["Ecco il vettore Campoelettrico2
    ossia la matrice del tensore elettromagnetico :\n",
  MatrixForm[Campoelettrico2]];
```

Ecco il vettore Campoelettrico2 ossia la matrice del tensore elettromagnetico :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{c\$^2\,Q\$}{L\$\,r\$^2} & 0 & 0 \\ \frac{c\$^2\,Q\$}{L\$\,r\$^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per dimostrare che questa espressione è corretta posso applicare qualche proprietà speciale dei tensori di rango 2 antisimmetrici (come lo è il tensore del campo elettromagnetico che ho chiamato) ma, disponendo di una bella funzione capace di calcolare la derivata covariante, posso calcolare la traccia di questa derivata che deve essere uguale alla corrente ma, dato che ho a che fare con una particella ferma nell'origine, mi aspetto di ottenere un vettore di zeri.

In[186]:=
```
DerivataCampoelettrico3 = Dcov$[Campoelettrico2, {2, 2}, grn$2, $sferico1];
Print[MatrixForm[DerivataCampoelettrico3[[1]]]];
Print[MatrixForm[DerivataCampoelettrico3[[2]]]];
Print[MatrixForm[DerivataCampoelettrico3[[3]]]];
Print[MatrixForm[DerivataCampoelettrico3[[4]]]];
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\,c\$^2\,Q\$}{L\$\,r\$^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q\$\,\left(c\$^2\,L\$\,r\$^2+G\$\,\left(Q\$^2-2\,L\$\,M\$\,r\$\right)\right)}{\left(-1+h\$^2\right)\,L\$^2\,r\$^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\left(-1+h\$^2\right)\,Q\$\,\left(c\$^2\,L\$\,r\$^2+G\$\,\left(Q\$^2-2\,L\$\,M\$\,r\$\right)\right)}{L\$^2\,r\$^3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2\,c\$^2\,Q\$}{L\$\,r\$^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{Q\$\,\left(c\$^2\,L\$\,r\$^2+G\$\,\left(Q\$^2-2\,L\$\,M\$\,r\$\right)\right)}{\left(-1+h\$^2\right)\,L\$^2\,r\$^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\left(-1+h\$^2\right)\,Q\$\,\left(c\$^2\,L\$\,r\$^2+G\$\,\left(Q\$^2-2\,L\$\,M\$\,r\$\right)\right)}{L\$^2\,r\$^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La traccia della derivata del campo elettrico rappresenta la corrente delle particelle cariche ma se il buco nero ed anche carico è fermo nell'origine, non può esserci nessuna corrente ossia devo ottenere un vettore di zeri...

In[191]:=
```
Print[Trincodacov$[DerivataCampoelettrico3, grn$2]]
```

```
{0, 0, 0, 0}
```

Applico la funzione che ottiene il tensore energia impulso covariante a partire dai tensori covarianti del campo elettromagnetico e della metrica.

In[192]:=
```
Tensorenergiaimpulso2 = FaTenEI$2[Campoelettrico2, grn$2];
Print["Tensorenergiaimpulso2 :=\n", MatrixForm[Tensorenergiaimpulso2]];
```

```
Tensorenergiaimpulso2 :=
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{c\$^2\,Q\$^2\,\left(c\$^2\,L\$\,r\$^2+G\$\,\left(Q\$^2-2\,L\$\,M\$\,r\$\right)\right)}{8\,L\$^2\,\pi\,r\$^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c\$^4\,Q\$^2}{8\,G\$\,\pi\,Q\$^2\,r\$^2-16\,G\$\,L\$\,M\$\,\pi\,r\$^3+8\,c\$^2\,L\$\,\pi\,r\$^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c\$^2\,Q\$^2}{8\,L\$\,\pi\,r\$^2-8\,h\$^2\,L\$\,\pi\,r\$^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c\$^2\,\left(-1+h\$^2\right)\,Q\$^2}{8\,L\$\,\pi\,r\$^2} \end{pmatrix}$$

Per scrivere l'equazione di Einstein ho bisogno del tensore di Ricci Curbastro.

In[194]:=
```
TensorediRicci2 = FaRicci$2[grn$2, $sferico1];
Print["Tensore di Ricci in forma totalmente covariante :=\n",
  MatrixForm[TensorediRicci2]];
Print["La costante dell'equazione di Einstein vale : ", kein$0];
```

Tensore di Ricci in forma totalmente covariante :=

$$\begin{pmatrix} \frac{G\$ Q\$^2 \left(c\$^2 L\$ r\$^2+G\$ \left(Q\$^2-2 L\$ M\$ r\$\right)\right)}{c\$^2 L\$^2 r\$^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{G\$ Q\$^2}{r\$^2 \left(c\$^2 L\$ r\$^2+G\$ \left(Q\$^2-2 L\$ M\$ r\$\right)\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G\$ Q\$^2}{c\$^2 \left(-1+h\$^2\right) L\$ r\$^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G\$ \left(-1+h\$^2\right) Q\$^2}{c\$^2 L\$ r\$^2} \end{pmatrix}$$

La costante dell'equazione di Einstein vale : $\frac{8 G\$ \pi}{c\$^4}$

Notare una caratteristica importante del tensore di Ricci scritto in forma mista ossia con il primo indice controvariante ed il secondo covariante: non dipende dalla massa del buco nero ma solo dalla sua carica !
Per questo motivo anche il tensore energia impulso (electromagnetic stress tensor) scritto in forma mista deve risultare indipendente dalla massa del buco nero di Reissner-Nordström !

In[197]:=
```
TensorediRicci21 = Simplify[Dot[Inverse[grn$2], TensorediRicci2]];
Print["Tensore di Ricci in forma mista:\n",
  MatrixForm[TensorediRicci21]];
```

Tensore di Ricci in forma mista:

$$\begin{pmatrix} \frac{G\$ Q\$^2}{c\$^2 L\$ r\$^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G\$ Q\$^2}{c\$^2 L\$ r\$^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G\$ Q\$^2}{c\$^2 L\$ r\$^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G\$ Q\$^2}{c\$^2 L\$ r\$^4} \end{pmatrix}$$

Usando la costante dell'equazione di Einstein VERIFICO CHE la metrica di Reissner-Nordström associata al potenziale elettromagnetico che ho specificato (potenzialevettore1) E' CORRETTA.

In[199]:=
```
Print["Devo ottenere una matrice di zeri. Giusto ? \n",
  MatrixForm[Simplify[TensorediRicci2 + kein$0 Tensorenergiaimpulso2]]];
```

Devo ottenere una matrice di zeri. Giusto ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NON E' BELLO ??? E OLTRETUTTO SEMPLICE ????

Quello che mi mancava era l'analogo calcolo nella metrica di Kerr-Newman nella forma di Boyer- Lindquist...

Se uso come potenziale vettore covariante questa espressione:

In[200]:=
```
A$1
```

Out[200]= $\left\{\frac{c\$^2 Q\$ r\$}{L\$ \left(a\$^2 h\$^2 + r\$^2\right)}, 0, 0, -\frac{a\$ c\$ \left(1 - h\$^2\right) Q\$ r\$}{L\$ \left(a\$^2 h\$^2 + r\$^2\right)}\right\}$

Il tensore campo elettrico in forma totalmente covariante non dipende dalla massa M$, il che è banale dato che lo ho ottenuto senza bisogno di specificare la metrica che uso...

In[201]:=
```
F$2 = Facampoelettrico$2[A$1, $sferico1];
Print["F$2 := \n", MatrixForm[F$2]];
```

F$2 :=

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c\$^2\, Q\$ \left(a\$^2\, h\$^2-r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & -\frac{2\, a\$^2\, c\$^2\, h\$\, Q\$\, r\$}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 \\ \frac{c\$^2\, Q\$ \left(-a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 & 0 & -\frac{a\$\, c\$ \left(-1+h\$^2\right) Q\$ \left(a\$^2\, h\$^2-r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} \\ \frac{2\, a\$^2\, c\$^2\, h\$\, Q\$\, r\$}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 & 0 & -\frac{2\, a\$\, c\$\, h\$\, Q\$\, r\$ \left(a\$^2+r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} \\ 0 & \frac{a\$\, c\$ \left(-1+h\$^2\right) Q\$ \left(a\$^2\, h\$^2-r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & \frac{2\, a\$\, c\$\, h\$\, Q\$\, r\$ \left(a\$^2+r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Quello che però è un buon indizio di stare usando le formule giuste è che anche il tensore campo elettrico in forma totalmente controvariante NON dipende dalla massa del buco nero benché, per ottenerlo, ho dovuto usare il tensore metrico in forma totalmente controvariante che dipende molto anche dalla massa M$ del buco nero ...

In[203]:=
```
F$211 = Simplify[Dot[KNbl$211, F$2, KNbl$211]];
Print["F$211 := \n", MatrixForm[F$211]];
```

F$211 :=

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{Q\$ \left(a\$^2\, h\$^2-r\$^2\right) \left(a\$^2+r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & -\frac{2\, a\$^2\, h\$ \left(-1+h\$^2\right) Q\$\, r\$}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 \\ \frac{Q\$ \left(a\$^2\, h\$^2-r\$^2\right) \left(a\$^2+r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & \frac{a\$\, c\$\, Q\$ \left(a\$^2\, h\$^2-r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} \\ \frac{2\, a\$^2\, h\$ \left(-1+h\$^2\right) Q\$\, r\$}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & -\frac{2\, a\$\, c\$\, h\$\, Q\$\, r\$}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} \\ 0 & \frac{a\$\, c\$\, Q\$ \left(-a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & \frac{2\, a\$\, c\$\, h\$\, Q\$\, r\$}{L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 \end{pmatrix}$$

In[205]:=
```
Tei$21 = Simplify[Dot[KNbl$211, FaTenEI$2[F$2, KNbl$2]]];
Print["Tei$21 := \n", MatrixForm[Tei$21]];
```

Tei$21 :=

$$\begin{pmatrix} \frac{c\$^2\, Q\$^2 \left(a\$^2 \left(-2+h\$^2\right)-r\$^2\right)}{8\, L\$\, \pi \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & -\frac{a\$\, c\$ \left(-1+h\$^2\right) Q\$^2 \left(a\$^2+r\$^2\right)}{4\, L\$\, \pi \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} \\ 0 & -\frac{c\$^2\, Q\$^2}{8\, L\$\, \pi \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c\$^2\, Q\$^2}{8\, L\$\, \pi \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 \\ -\frac{a\$\, c\$^3\, Q\$^2}{4\, L\$\, \pi \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & \frac{c\$^2\, Q\$^2 \left(-a\$^2 \left(-2+h\$^2\right)+r\$^2\right)}{8\, L\$\, \pi \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} \end{pmatrix}$$

In[207]:=
```
R$21 = Simplify[Dot[KNbl$211, FaRicci$2[KNbl$2, $sferico1]]];
Print["R$21 :=\n",
  MatrixForm[R$21]];
```

R$21 :=

$$\begin{pmatrix} \frac{G\$\, Q\$^2 \left(-a\$^2 \left(-2+h\$^2\right)+r\$^2\right)}{c\$^2\, L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & \frac{2\, a\$\, G\$ \left(-1+h\$^2\right) Q\$^2 \left(a\$^2+r\$^2\right)}{c\$^3\, L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} \\ 0 & \frac{G\$\, Q\$^2}{c\$^2\, L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G\$\, Q\$^2}{c\$^2\, L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 \\ \frac{2\, a\$\, G\$\, Q\$^2}{c\$\, L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & \frac{G\$\, Q\$^2 \left(a\$^2 \left(-2+h\$^2\right)-r\$^2\right)}{c\$^2\, L\$ \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} \end{pmatrix}$$

Ed ottengo la tanto agognata dimostrazione che conosco il potenziale vettore della metrica del buco nero dotato di massa, carica e spin (**Kerr-Newman** nella forma di **Boyer- Lindquist**) e da quel potenziale vettore deduco la dimostrazione della correttezza dell'espressione del tensore metrico usato.

In[209]:=
```
Simplify[R$21 + kein$0 Tei$21 ]
```

Out[209]=
```
{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

Inno di gioia !

Allah E' GRANDE !

GAUDEAMUS IGITUR !

Gaudeamus igitur
Iuvenes dum sumus.
Post iucundam iuventutem
Post molestam senectutem
Nos habebit humus.

Ubi sunt qui ante nos
In mundo fuere?
Vadite ad superos
Transite in inferos
Hos si vis videre.

Vita nostra brevis est
Brevi finietur.
Venit mors velociter
Rapit nos atrociter
Nemini parcetur.

Vivat academia!
Vivant professores!
Vivat membrum quodlibet;
Vivant membra quaelibet;
Semper sint in flore.

Vivant omnes virgines
Faciles, formosae.
Vivant et mulieres
Tenerae, amabiles,
Bonae, laboriosae.

Vivat et res publica
et qui illam regit.
Vivat nostra civitas,
Maecenatum caritas
Quae nos hic protegit.

Pereat tristitia,
Pereant osores.
Pereat diabolus,
Quivis antiburschius

Atque irrisores.

Quis confluxus
hodie Academicorum?
E longinquo convenerunt,
Protinusque successerunt
In commune forum.

Vivat nostra societas,
Vivant studiosi;
Crescat una veritas
Floreat fraternitas
Patriae prosperitas.

Alma Mater floreat,
Quae nos educavit;
Caros et commilitones,
Dissitas in regiones
Sparsos, congregavit

http://en.wikipedia.org/wiki/Gaudeamus_igitur

Conclusione

PROMETTE BENE ! e prima o poi metterò qui questa libreria capace di banalizzare il calcolo di molte cose complicate nel campo tensoriale...

http://www.elegio.it/cdf/mathematica2013/

Dal punto di vista pratico ho verificato la formula del potenziale vettore covariante del campo elettromagnetico. Una formula poco pubblicizzata in internet e, a volte, riportata in modo non corretto !!!

In[210]:= **A$1**

Out[210]=
$$\left\{\frac{c\$^2\, Q\$\, r\$}{L\$\,\left(a\$^2\, h\$^2 + r\$^2\right)},\ 0,\ 0,\ -\frac{a\$\, c\$\,\left(1 - h\$^2\right) Q\$\, r\$}{L\$\,\left(a\$^2\, h\$^2 + r\$^2\right)}\right\}$$

Questo potenziale vettore giustifica il buco nero di Kerr Newmann espresso nella forma di Boyer Lindquist;

In[211]:= **MatrixForm[KNbl$2]**

Out[211]//MatrixForm=
$$\left(\begin{array}{cccc}
\frac{a\$^2\, c\$^2\, h\$^2\, L\$+G\$\, Q\$^2-2\, G\$\, L\$\, M\$\, r\$+c\$^2\, L\$\, r\$^2}{a\$^2\, h\$^2\, L\$+L\$\, r\$^2} & 0 & 0 & \frac{a\$\, G\text{:}}{} \\
0 & -\frac{c\$^2\, L\$\,\left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)}{a\$^2\, c\$^2\, L\$+c\$^2\, L\$\, r\$^2+G\$\,\left(Q\$^2-2\, L\$\, M\$\, r\$\right)} & 0 & \\
0 & 0 & \frac{a\$^2\, h\$^2+r\$^2}{-1+h\$^2} & \\
\frac{a\$\, G\$\,\left(1-h\$^2\right)\left(-\frac{Q\$^2}{L\$}+2\, M\$\, r\$\right)}{c\$\,\left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)} & 0 & 0 & \frac{\left(1-h\$^2\right)\left(-\left(a\$^2+r\$^2\right)\right.}{}
\end{array}\right.$$

Come fatto ... insolito, va notato che questa metrica non contiene nessuna funzione trigonometrica e nessuna radice quadrata e questo consente a *Mathematica* 9 di eseguire i calcoli e le semplificazioni simboliche con altissima efficienza.

Altro risultato importante è la constatazione che il tensore del campo elettromagnetico anche in forma totalmente controvariante non dipende dalla massa M$ (espressa in kg) del buco nero ma solo dalla sua carica Q$ espressa in Coulomb e dallo spin indicato da a$. Ricordo che per comoditò indico con L$ una costante che vale esattamente 10000000 e con c$ la velocità della luce che vale esattamente 299792458 mentre r$ rappresenta la coordinata radiale e h$ rappresenta il coseno della latitudine in coordinate sferiche ossia vale da 1 a -1 ed è zero all'equatore.

In[212]:= **MatrixForm[F$211]**

Out[212]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{Q\$ \left(a\$^2 h\$^2-r\$^2\right) \left(a\$^2+r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} & -\frac{2\, a\$^2\, h\$ \left(-1+h\$^2\right) Q\$\, r\$}{L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 \\ \frac{Q\$ \left(a\$^2 h\$^2-r\$^2\right) \left(a\$^2+r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & \frac{a\$\, c\$\, Q\$ \left(a\$^2 h\$^2-r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} \\ \frac{2\, a\$^2\, h\$ \left(-1+h\$^2\right) Q\$\, r\$}{L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & -\frac{2\, a\$\, c\$\, h\$\, Q\$\, r\$}{L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} \\ 0 & \frac{a\$\, c\$\, Q\$ \left(-a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)}{L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} & \frac{2\, a\$\, c\$\, h\$\, Q\$\, r\$}{L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ho indicato con G$ la costante di gravitzione universale.

Altro fatto STRANO MA UTILE PER LE VERIFICHE è che il tensore di Ricci in forma mista non è una matrice simmetrica ma, neppure lui, dipende dalla massa M$ del buco nero:

In[213]:= **MatrixForm[R$21]**

Out[213]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{G\$\, Q\$^2 \left(-a\$^2 \left(-2+h\$^2\right)+r\$^2\right)}{c\$^2\, L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & \frac{2\, a\$\, G\$ \left(-1+h\$^2\right) Q\$^2 \left(a\$^2+r\$^2\right)}{c\$^3\, L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} \\ 0 & \frac{G\$\, Q\$^2}{c\$^2\, L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G\$\, Q\$^2}{c\$^2\, L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 \\ \frac{2\, a\$\, G\$\, Q\$^2}{c\$\, L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & \frac{G\$\, Q\$^2 \left(a\$^2 \left(-2+h\$^2\right)-r\$^2\right)}{c\$^2\, L\$ \left(a\$^2 h\$^2+r\$^2\right)^3} \end{pmatrix}$$

Una cosa interessante e che potrebbe piacere all'Emilio Spedicato è che l'equazione di Einstein è indipendente dall'esatto valoore di G$ perché il tensore di Ricci deve essere proporzionale al tensore Energia Inpulso del campo elettromagnetico espresso in forma mista, tramite la costante di Einstein che diipende anche lei da G$

Ho chiamato questa costante kein$0

In[214]:= **kein$0**

Out[214]= $\frac{8\, G\$\, \pi}{c\$^4}$

E dai calcoli fatti il tensore energia impulso espresso in forma mista NON CONTIENE LA MASSA ossia è dato da:

In[215]:= **MatrixForm[Tei$21]**

Out[215]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{c\$^2\, Q\$^2\, \left(a\$^2\, \left(-2+h\$^2\right)-r\$^2\right)}{8\, L\$\, \pi\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & -\frac{a\$\, c\$\, \left(-1+h\$^2\right)\, Q\$^2\, \left(a\$^2+r\$^2\right)}{4\, L\$\, \pi\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} \\ 0 & -\frac{c\$^2\, Q\$^2}{8\, L\$\, \pi\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c\$^2\, Q\$^2}{8\, L\$\, \pi\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 \\ -\frac{a\$\, c\$^3\, Q\$^2}{4\, L\$\, \pi\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & \frac{c\$^2\, Q\$^2\, \left(-a\$^2\, \left(-2+h\$^2\right)+r\$^2\right)}{8\, L\$\, \pi\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} \end{pmatrix}$$

Dunque, moltiplicando Tei$21 per kein$0 il valore di G$ diventa del tutto inessenziale perché si può eliminare dal tensore di Ricci che diventa:

In[216]:= **MatrixForm[R$21 / G$]**

Out[216]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{Q\$^2\, \left(-a\$^2\, \left(-2+h\$^2\right)+r\$^2\right)}{c\$^2\, L\$\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & \frac{2\, a\$\, \left(-1+h\$^2\right)\, Q\$^2\, \left(a\$^2+r\$^2\right)}{c\$^3\, L\$\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} \\ 0 & \frac{Q\$^2}{c\$^2\, L\$\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Q\$^2}{c\$^2\, L\$\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^2} & 0 \\ \frac{2\, a\$\, Q\$^2}{c\$\, L\$\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} & 0 & 0 & \frac{Q\$^2\, \left(a\$^2\, \left(-2+h\$^2\right)-r\$^2\right)}{c\$^2\, L\$\, \left(a\$^2\, h\$^2+r\$^2\right)^3} \end{pmatrix}$$

Tenuto poi conto che la vera “carica gravitazionale” non è la massa M$ ma la massa moltiplicata per G$ ossia G$ M$ ecco che a livello geometrico il valore di G$ è inessenziale....

Giampaolo Bottoni
26 aprile 2013

In[217]:= **Print[Inizioesecuzione, " Ora: ", DateString[]];**

```
Sat 1 Mar 2014 17:50:23 Ora: Sat 1 Mar 2014 17:51:24
```