Esempio n.2 d'uso della libreria libtensori.mc

Divergenze ed altri operatori differenziali...
Vedere:
http://www.elegio.it/mc2/maxwell-generale.html
http://www.elegio.it/mc2/Ricci-Riemann.html

0.1 Premessa: carico la libreria

Utilizza la libreria tensoriale. Deve dunque caricarla...

```
(%i1) load_questo:"libtensori.mc";
(%o1) libtensori.mc
```

```
(%i2) salvoqui:"c:/xmaxima/tensori_x.mc";
(%o2) c:/xmaxima/tensori_x.mc
```

Dato che nel file che voglio rileggere con una load(...) ci
può essere una closefile(), per non avere segnalazioni di
errore apro un file di dribbling il cui contenuto
non mi interessa e dunque non importa se lo sovrascriverò.

```
(%i3) if atom(path_iniziale) then writefile("eliminando.mc");
Starts dribbling to eliminando.mc (2010/6/22, 23:51:44).
NIL
(%o3) done
```

Ora amplia il path

```
(%i4) altracartella:"C:/xmaxima/###.{mc,mac}";
(%o4) C:/xmaxima/###.{mc,mac}
```

E' consigliabile, prima di modificarlo, di salvare il valore del
path di default di Maxima.

```
(%i5) ( if atom(path_iniziale) then (path_iniziale: file_search_maxima) )$
```

Ora amplio il path iniziale aggiungendogli la cartella. Con questo
trucco posso ricaricare varie volte questo documento senza il
problema di modificare ogni volta il path di ricerca.

```
(%i6) file_search_maxima: cons(altracartella,path_iniziale);
(%o6) [C:/xmaxima/###.{mc,mac},C:/Users/Giampaolo/maxima/###.{mac,mc},
C:\PROGRA~2\MAXIMA~1.0/share/maxima/5.21.0/share/###.{mac,mc},
C:\PROGRA~2\MAXIMA~1.0/share/maxima/5.21.0/share/{affine,algebra,algebra/charse
]
```

Dopo avere ampliato il path, cerco di caricare la libreria tensoriale.

```
(%i7) load(load_questo);
[Ora comincio a lavorare su ,c:/xmaxima/tensori_x.mc]
[Il path usato è il seguente,C:/xmaxima/###.{mc,mac}]
Fine della libreria tensoriale. Vedere libmia
Finished dribbling to eliminando.mc.
NIL
(%o7) C:/xmaxima/libtensori.mc
```

Ora salva su un nuovo file ossia salvoqui...

```
(%i8) writefile(salvoqui);
Starts dribbling to c:/xmaxima/tensori_x.mc (2010/6/22, 23:51:45).
NIL
(%o8) done
```

Guardo i nomi delle funzioni della libreria.

```
(%i9) libmia;
(%o9) [ada(la,per),commentalo(tn,comme),commento(tn),
diffcov(tn,metrica,nome),dimensione(tn),divergenza(tn,ki,metrica),
fa_ch122(g22,listavariabili),fa_ch222(g220),fa_diff(tn,variabili,comme)
,fa_metrica(mg,listavariabili),fa_r1222(t22,listavariabili),
fa_r22(t22,listavariabili),fa_r2222(t22,listavariabili),indici(tn),
listadatensore(tn),ordine(tn),permuta(tn,per,com),
riemann_1222(t22,variabili),riemann_2222(t22,variabili),
scala(ta,ia,tb,ib),tassegna(tn,val,p),tcontrov(lv,metrica),
tcov(lv,metrica),tensoredalista(lista,tipi,comme,ndim),tensorp(tn),
tmat11(mat,metrica),tmat12(mat,metrica),tmat21(mat,metrica),
tmat22(mat,metrica),tmeno(tena,tenb),tprod(tscala,tenb),
traccia(tn,ih,ik),tsca(sc,metrica),tsomma(tena,tenb),tvale(tn,p),
zerotensor(tipi,comme,ndim)]
```

1 Creiamo una metrica per la sperimentazione delle formule:

Usiamo la più generica metrica diagonale di uno spazio
a quattro dimensioni.

```
(%i10) ct_coords: [t,r,h,p];
(%o10) [t,r,h,p]
```

```
(%i11) depends([gt,gr,gh,gp],[t,r,h,p]);
(%o11) [gt(t,r,h,p),gr(t,r,h,p),gh(t,r,h,p),gp(t,r,h,p)]
```

```
(%i12) ggg22:matrix(
       [gt,0,0,0],
       [0,gr,0,0],
       [0,0,gh,0],
       [0,0,0,gp]);
```

(%o12) $\begin{bmatrix} gt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & gr & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & gp \end{bmatrix}$

```
(%i13) metrica:fa_metrica(ggg22,ct_coords)$
```

Ha creato un vettore di undici elementi:
[1] : lista delle variabili
[2] : tensore metrico covariante
[3] : tensore metrico controvariante
[4] : derivate prime del tens. metrico cov.
[5] : derivate seconde del tens. m. cov.
[6] : simboli di Christoffel di prima specie
[7] : simboli di Christoffel di seconda specie
[8] : Riemann col solo primo indice controvariante
[9] : Riemann totalmente controvariante
[10]: Ricci totalmente covariante
[11]: sqrt(abs(determinate del tens.metr.cov.))

2 Divergenza di un vettore.

La divergenza diver di un vettore (che è uno scalare)
è data, in generale, da (diver:A18[1][i,i]) ma può essere
calcolata senza bisogno di fare derivate covarianti
ossia detto sqrtabsdet la radice quadrata del valore
assoluto del determinante del tensore metrico covariante,
si ottiene con la formula:
(AD1[j]:sqrtabsdet*A1[i], diver:AD10[1][i,i]/sqrtabsdet)

Scrivo le derivate parziali in forma abbreviata ossia
indicando con un pedice la variabile di derivazione.

```
(%i14) derivabbrev:true;
(%o14) true
```

```
(%i15) metrica[2];
```

(%o15) $\left[\begin{bmatrix} gt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & gr & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & gp \end{bmatrix}, [2, 2, (tensore\ metrico\ covariante), 4]\right]$

La radice quadrata del valore assoluto del determinante vale:

```
(%i16) rest(metrica[2],-1);
```

(%o16) $\left[\begin{bmatrix} gt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & gr & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & gp \end{bmatrix}\right]$

```
(%i17) metrica[3];
```

(%o17) $\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{gt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{gr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{gh} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{gp} \end{bmatrix}, [1, 1, (tensore\ metrico\ controvariante), 4]\right]$

```
(%i18) metrica[4];
```

(%o18) $\left[\begin{bmatrix} gt_t & gt_r & gt_h & gt_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ gr_t & gr_r & gr_h & gr_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ gh_t & gh_r & gh_h & gh_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ gp_t & gp_r & gp_h & gp_p \end{bmatrix}, [2, 2, 0, g220, 4]\right]$

```
(%i19) metrica[5];
```

(%o19)

$$\left[\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} gt_{t\,t} & gt_{r\,t} & gt_{h\,t} & gt_{p\,t} \\ gt_{r\,t} & gt_{r\,r} & gt_{h\,r} & gt_{p\,r} \\ gt_{h\,t} & gt_{h\,r} & gt_{h\,h} & gt_{h\,p} \\ gt_{p\,t} & gt_{p\,r} & gt_{h\,p} & gt_{p\,p} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} gr_{t\,t} & gr_{r\,t} & gr_{h\,t} & gr_{p\,t} \\ gr_{r\,t} & gr_{r\,r} & gr_{h\,r} & gr_{p\,r} \\ gr_{h\,t} & gr_{h\,r} & gr_{h\,h} & gr_{h\,p} \\ gr_{p\,t} & gr_{p\,r} & gr_{h\,p} & gr_{p\,p} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} gh_{t\,t} & gh_{r\,t} & gh_{h\,t} & gh_{p\,t} \\ gh_{r\,t} & gh_{r\,r} & gh_{h\,r} & gh_{p\,r} \\ gh_{h\,t} & gh_{h\,r} & gh_{h\,h} & gh_{h\,p} \\ gh_{p\,t} & gh_{p\,r} & gh_{h\,p} & gh_{p\,p} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} gp_{t\,t} & gp_{r\,t} & gp_{h\,t} & gp_{p\,t} \\ gp_{r\,t} & gp_{r\,r} & gp_{h\,r} & gp_{p\,r} \\ gp_{h\,t} & gp_{h\,r} & gp_{h\,h} & gp_{h\,p} \\ gp_{p\,t} & gp_{p\,r} & gp_{h\,p} & gp_{p\,p} \end{bmatrix}
\end{bmatrix},\ [2,2,0,0,g2200,4]\right]$$

(%i20) metrica[6];

(%o20)
$$\left[\begin{bmatrix}\frac{gt_t}{2} & \frac{gt_r}{2} & \frac{gt_h}{2} & \frac{gt_p}{2}\\ \frac{gt_r}{2} & -\frac{gr_t}{2} & 0 & 0\\ \frac{gt_h}{2} & 0 & -\frac{gh_t}{2} & 0\\ \frac{gt_p}{2} & 0 & 0 & -\frac{gp_t}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{gt_r}{2} & \frac{gr_t}{2} & 0 & 0\\ \frac{gr_t}{2} & \frac{gr_r}{2} & \frac{gr_h}{2} & \frac{gr_p}{2}\\ 0 & \frac{gr_h}{2} & -\frac{gh_r}{2} & 0\\ 0 & \frac{gr_p}{2} & 0 & -\frac{gp_r}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{gt_h}{2} & 0 & \frac{gh_t}{2} & 0\\ 0 & -\frac{gr_h}{2} & \frac{gh_r}{2} & 0\\ \frac{gh_t}{2} & \frac{gh_r}{2} & \frac{gh_h}{2} & \frac{gh_p}{2}\\ 0 & 0 & \frac{gh_p}{2} & -\frac{gp_h}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{gt_p}{2} & 0 & 0 & \frac{gp_t}{2}\\ 0 & -\frac{gr_p}{2} & 0 & \frac{gp_r}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{gh_p}{2} & \frac{gp_h}{2}\\ \frac{gp_t}{2} & \frac{gp_r}{2} & \frac{gp_h}{2} & \frac{gp_p}{2}\end{bmatrix}, [2,2,2,(Christoffel\ prima\ specie),4]\right]$$

(%i21) metrica[7];

(%o21)
$$\left[\begin{bmatrix}\frac{gt_t}{2\ gt} & \frac{gt_r}{2\ gt} & \frac{gt_h}{2\ gt} & \frac{gt_p}{2\ gt}\\ \frac{gt_r}{2\ gt} & -\frac{gr_t}{2\ gt} & 0 & 0\\ \frac{gt_h}{2\ gt} & 0 & -\frac{gh_t}{2\ gt} & 0\\ \frac{gt_p}{2\ gt} & 0 & 0 & -\frac{gp_t}{2\ gt}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{gt_r}{2\ gr} & \frac{gr_t}{2\ gr} & 0 & 0\\ \frac{gr_t}{2\ gr} & \frac{gr_r}{2\ gr} & \frac{gr_h}{2\ gr} & \frac{gr_p}{2\ gr}\\ 0 & \frac{gr_h}{2\ gr} & -\frac{gh_r}{2\ gr} & 0\\ 0 & \frac{gr_p}{2\ gr} & 0 & -\frac{gp_r}{2\ gr}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{gt_h}{2\ gh} & 0 & \frac{gh_t}{2\ gh} & 0\\ 0 & -\frac{gr_h}{2\ gh} & \frac{gh_r}{2\ gh} & 0\\ \frac{gh_t}{2\ gh} & \frac{gh_r}{2\ gh} & \frac{gh_h}{2\ gh} & \frac{gh_p}{2\ gh}\\ 0 & 0 & \frac{gh_p}{2\ gh} & -\frac{gp_h}{2\ gh}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{gt_p}{2\ gp} & 0 & 0 & \frac{gp_t}{2\ gp}\\ 0 & -\frac{gr_p}{2\ gp} & 0 & \frac{gp_r}{2\ gp}\\ 0 & 0 & -\frac{gh_p}{2\ gp} & \frac{gp_h}{2\ gp}\\ \frac{gp_t}{2\ gp} & \frac{gp_r}{2\ gp} & \frac{gp_h}{2\ gp} & \frac{gp_p}{2\ gp}\end{bmatrix}, [1,2,2,(Christoffel\ seconda\ specie),4]\right]$$

Data l'importanza dei simboli di Christoffel di seconda specie ripeto qui la stampa delle quattro matrici che costituiscono appunto lo pseudotensore del terzo ordine.

(%i22) `ch122:[0,0,0,0]$`

(%i23)
```
ch122[1]:matrix([gt[t]/(2*gt),gt[r]/(2*gt),gt[h]/(2*gt),gt[p]/(2*gt)],
[gt[r]/(2*gt),-gr[t]/(2*gt),0,0],[gt[h]/(2*gt),0,-gh[t]/(2*gt),0],
[gt[p]/(2*gt),0,0,-gp[t]/(2*gt)]);
```

(%o23)
$$\begin{bmatrix} \frac{gt_t}{2\,gt} & \frac{gt_r}{2\,gt} & \frac{gt_h}{2\,gt} & \frac{gt_p}{2\,gt} \\ \frac{gt_r}{2\,gt} & -\frac{gr_t}{2\,gt} & 0 & 0 \\ \frac{gt_h}{2\,gt} & 0 & -\frac{gh_t}{2\,gt} & 0 \\ \frac{gt_p}{2\,gt} & 0 & 0 & -\frac{gp_t}{2\,gt} \end{bmatrix}$$

(%i24)
```
ch122[2]:matrix([-gt[r]/(2*gr),gr[t]/(2*gr),0,0],
[gr[t]/(2*gr),gr[r]/(2*gr),gr[h]/(2*gr),gr[p]/(2*gr)],
[0,gr[h]/(2*gr),-gh[r]/(2*gr),0],
[0,gr[p]/(2*gr),0,-gp[r]/(2*gr)]);
```

(%o24)
$$\begin{bmatrix} -\frac{gt_r}{2\,gr} & \frac{gr_t}{2\,gr} & 0 & 0 \\ \frac{gr_t}{2\,gr} & \frac{gr_r}{2\,gr} & \frac{gr_h}{2\,gr} & \frac{gr_p}{2\,gr} \\ 0 & \frac{gr_h}{2\,gr} & -\frac{gh_r}{2\,gr} & 0 \\ 0 & \frac{gr_p}{2\,gr} & 0 & -\frac{gp_r}{2\,gr} \end{bmatrix}$$

(%i25)
```
ch122[3]:matrix([-gt[h]/(2*gh),0,gh[t]/(2*gh),0],
[0,-gr[h]/(2*gh),gh[r]/(2*gh),0],
[gh[t]/(2*gh),gh[r]/(2*gh),gh[h]/(2*gh),gh[p]/(2*gh)],
[0,0,gh[p]/(2*gh),-gp[h]/(2*gh)]);
```

(%o25)
$$\begin{bmatrix} -\frac{gt_h}{2\,gh} & 0 & \frac{gh_t}{2\,gh} & 0 \\ 0 & -\frac{gr_h}{2\,gh} & \frac{gh_r}{2\,gh} & 0 \\ \frac{gh_t}{2\,gh} & \frac{gh_r}{2\,gh} & \frac{gh_h}{2\,gh} & \frac{gh_p}{2\,gh} \\ 0 & 0 & \frac{gh_p}{2\,gh} & -\frac{gp_h}{2\,gh} \end{bmatrix}$$

(%i26)
```
ch122[4]:matrix([-gt[p]/(2*gp),0,0,gp[t]/(2*gp)],
[0,-gr[p]/(2*gp),0,gp[r]/(2*gp)],
[0,0,-gh[p]/(2*gp),gp[h]/(2*gp)],
[gp[t]/(2*gp),gp[r]/(2*gp),gp[h]/(2*gp),gp[p]/(2*gp)]);
```

(%o26)
$$\begin{bmatrix} -\frac{gt_p}{2\,gp} & 0 & 0 & \frac{gp_t}{2\,gp} \\ 0 & -\frac{gr_p}{2\,gp} & 0 & \frac{gp_r}{2\,gp} \\ 0 & 0 & -\frac{gh_p}{2\,gp} & \frac{gp_h}{2\,gp} \\ \frac{gp_t}{2\,gp} & \frac{gp_r}{2\,gp} & \frac{gp_h}{2\,gp} & \frac{gp_p}{2\,gp} \end{bmatrix}$$

La radice quadrata del valore assoluto del determinante del tensore metrico covariante svolge un ruolo fondamentale in parecchie formule. Ovviamete, per un tensore metrico diagonale specificato simbolicamente vale:

(%i27)
```
metrica[11][1];
```

(%o27) $\sqrt{|gh|}\,\sqrt{|gp|}\,\sqrt{|gr|}\,\sqrt{|gt|}$

Crea la funzione divergenza del tensore rispetto ad un dato indice. Fa uso della derivata covariante per cui questa funzione è applicabile a qualunque tensore di ordine positivo.

Nota: qui serve per test ma è già inclusa nella libreria...

(%i28)
```
xdivergenza(tn,kkk,metrica):=block([k,tm,j],
        if not(tensorp(tn)) then
           return("Errore: non tensore"),
        if not(numberp(kkk)) then
           return("Errore: non numero intero"),
        k:floor(kkk),
        if 1>k then
           return("Errore: indice non positivo"),
        j:indici(tn),
        if k>length(j) then
           return("Errore: indice troppo elevato"),
        if mod(j[k],2)=1 then tm:diffcov(tn,metrica,"!")
        else ( tm:scala(metrica[3],1,tn,k),
               tm:diffcov(tm,metrica,"!")),
        traccia(tm,k,ordine(tm))
        )$
```

Scrivo un vettore controvariante generico:

```
(%i29) depends([At,Ar,Ah,Ap],ct_coords);
```
(%o29) $[\mathrm{At}(t,r,h,p),\mathrm{Ar}(t,r,h,p),\mathrm{Ah}(t,r,h,p),\mathrm{Ap}(t,r,h,p)]$

```
(%i30) A1:[At,Ar,Ah,Ap,[1,"Vettore controvariante",4]];
```
(%o30) $[At, Ar, Ah, Ap, [1, Vettore\ controvariante, 4]]$

Sfrutto le proprietà della divergenza di un vettore controvariante
per non calcolare la derivata covariante.

```
(%i31) AD1:append(metrica[11][1]*rest(A1,-1),
        [[1,"sqrt(|g22|)*A1",4]]);
```
(%o31) $[At\sqrt{|gh|}\sqrt{|gp|}\sqrt{|gr|}\sqrt{|gt|}, Ar\sqrt{|gh|}\sqrt{|gp|}\sqrt{|gr|}\sqrt{|gt|}, Ah\sqrt{|gh|}\sqrt{|gp|}\sqrt{|gr|}\sqrt{|gt|}, Ap\sqrt{|gh|}\sqrt{|gp|}\sqrt{|gr|}\sqrt{|gt|}, [1, sqrt(|g22|)*A1, 4]]$

```
(%i32) vala:traccia(append([radcan(fa_diff(AD1,ct_coords,"gradiente di AD1")[1
        [[1,0,"derivata ordinaria",4]]),1,2);
```
(%o32)
$$[\frac{At\ gh\ gp\ gr\ (gt_t)+\left(At\ gh\ gp\ (gr_t)+(At\ gh\ (gp_t)+(At\ (gh_t)+2\ (At_t)\ gh)\ gp)\ gr\right)\ gt}{2\ gh\ gp\ gr\ gt}+$$
$$\frac{Ar\ gh\ gp\ gr\ (gt_r)+\left(Ar\ gh\ gp\ (gr_r)+(Ar\ gh\ (gp_r)+(Ar\ (gh_r)+2\ (Ar_r)\ gh)\ gp)\ gr\right)\ gt}{2\ gh\ gp\ gr\ gt}+$$
$$\frac{Ap\ gh\ gp\ gr\ (gt_p)+\left(Ap\ gh\ gp\ (gr_p)+(Ap\ gh\ (gp_p)+(Ap\ (gh_p)+2\ (Ap_p)\ gh)\ gp)\ gr\right)\ gt}{2\ gh\ gp\ gr\ gt}+$$
$$\frac{Ah\ gh\ gp\ gr\ (gt_h)+\left(Ah\ gh\ gp\ (gr_h)+(Ah\ gh\ (gp_h)+(Ah\ (gh_h)+2\ (Ah_h)\ gh)\ gp)\ gr\right)\ gt}{2\ gh\ gp\ gr\ gt}, [ridotto, 4]]$$

```
(%i33) xssa:xdivergenza(A1,1,metrica)$
```

Controllo se ci sono differenze rispetto alla versione
in libreria...

```
(%i34) tmeno(xssa,divergenza(A1,1,metrica));
```
(%o34) $[0, [(Differenza\ tra\ tensori), 4]]$

I due modi di calcolare la divergenza di un vettore controvariante
coincidono. Infatti...

```
(%i35) ratsimp(rest(ratsimp(xssa),-1)-rest(vala,-1));
```
(%o35) $[0]$

Mi aspetto che siano coincidenti anche i due modi di calcolare la divergenza di un vettore covariante.
Sia B2 un vettore covariante...
Va prima convertito in controvariante e poi derivato.

```
(%i36) depends([Bt,Br,Bh,Bp],ct_coords);
```

(%o36) $[\mathrm{Bt}(t,r,h,p),\mathrm{Br}(t,r,h,p),\mathrm{Bh}(t,r,h,p),\mathrm{Bp}(t,r,h,p)]$

```
(%i37) B2:[Bt,Br,Bh,Bp,[2,"Vettore covariante",4]];
```

(%o37) $[Bt,Br,Bh,Bp,[2,\mathit{Vettore\ covariante},4]]$

Calcolo la sua divergenza in modo standard...

```
(%i38) xssb:xdivergenza(B2,1,metrica)$
```

Controllo se ci sono differenze rispetto alla versione in libreria

```
(%i39) tmeno(xssb,divergenza(B2,1,metrica));
```

(%o39) $[0,[(\mathit{Differenza\ tra\ tensori}),4]]$

Ora invece sfrutto le proprietà della divergenza di un vettore...

```
(%i40) B1:scala(metrica[3],2,B2,1);
```

(%o40) $[\frac{Bt}{gt},\frac{Br}{gr},\frac{Bh}{gh},\frac{Bp}{gp},[1,\mathit{prod\text{-}scalare},4]]$

```
(%i41) BD1:append(metrica[11][1]*rest(B1,-1),
        [[1,"sqrt(|g22|)*B1",4]]);
```

(%o41) $[\frac{Bt\sqrt{|gh|}\sqrt{|gp|}\sqrt{|gr|}\sqrt{|gt|}}{gt},\frac{Br\sqrt{|gh|}\sqrt{|gp|}\sqrt{|gr|}\sqrt{|gt|}}{gr},\frac{Bh\sqrt{|gh|}\sqrt{|gp|}\sqrt{|gr|}\sqrt{|gt|}}{gh},\frac{Bp\sqrt{|gh|}\sqrt{|gp|}\sqrt{|gr|}\sqrt{|gt|}}{gp},[1,\mathit{sqrt(|g22|)*B1},4]]$

```
(%i42) valb:append([radcan(fa_diff(BD1,ct_coords,
        "gradiente di BD1")[1]/metrica[11][1])],
        [[1,0,"derivata ordinaria",4]]);
```

(%o42) [

$$\begin{bmatrix} -\frac{Bt\,gh\,gp\,gr\,(gt_t)+(((-Bt\,(gh_t)-2\,(Bt_t)\,gh)\,gp-Bt\,gh\,(gp_t))\,gr-Bt\,gh\,gp\,(gr_t))\,gt}{2\,gh\,gp\,gr\,gt^2} & -\frac{Bt\,gh\,gp\,gr\,(gt_r)+(((-Bt\,(gh_r \ldots}{\ldots} \\ \frac{Br\,gh\,gp\,gr\,(gt_t)+((Br\,gh\,(gp_t)+(Br\,(gh_t)+2\,(Br_t)\,gh)\,gp)\,gr-Br\,gh\,gp\,(gr_t))\,gt}{2\,gh\,gp\,gr^2\,gt} & \frac{Br\,gh\,gp\,gr\,(gt_r)+((Br\,gh\,(gp_r \ldots}{\ldots} \\ \frac{Bh\,gh\,gp\,gr\,(gt_t)+(Bh\,gh\,gp\,(gr_t)+(Bh\,gh\,(gp_t)+(2\,(Bh_t)\,gh-Bh\,(gh_t))\,gp)\,gr)\,gt}{2\,gh^2\,gp\,gr\,gt} & \frac{Bh\,gh\,gp\,gr\,(gt_r)+(Bh\,gh\,gp\,(g \ldots}{\ldots} \\ \frac{Bp\,gh\,gp\,gr\,(gt_t)+(Bp\,gh\,gp\,(gr_t)+((Bp\,(gh_t)+2\,(Bp_t)\,gh)\,gp-Bp\,gh\,(gp_t))\,gr)\,gt}{2\,gh\,gp^2\,gr\,gt} & \frac{Bp\,gh\,gp\,gr\,(gt_r)+(Bp\,gh\,gp\,(g \ldots}{\ldots} \end{bmatrix}$$

, [1, 0, *derivata ordinaria*, 4]]

```
(%i43) scab:traccia(valb,1,2);
```

(%o43)

$$\left[-\frac{Bt\,gh\,gp\,gr\,(gt_t)+\left(((-Bt\,(gh_t)-2\,(Bt_t)\,gh)\,gp-Bt\,gh\,(gp_t))\,gr-Bt\,gh\,gp\,(gr_t)\right)\,gt}{2\,gh\,gp\,gr\,gt^2} + \frac{Br\,gh\,gp\,gr\,(gt_r)+\left((Br\,gh\,(gp_r)+(Br\,(gh_r)+2\,(Br_r)\,gh)\,gp)\,gr-Br\,gh\,gp\,(gr_r)\right)\,gt}{2\,gh\,gp\,gr^2\,gt} + \frac{Bp\,gh\,gp\,gr\,(gt_p)+\left(Bp\,gh\,gp\,(gr_p)+((Bp\,(gh_p)+2\,(Bp_p)\,gh)\,gp-Bp\,gh\,(gp_p))\,gr\right)\,gt}{2\,gh\,gp^2\,gr\,gt} + \frac{Bh\,gh\,gp\,gr\,(gt_h)+\left(Bh\,gh\,gp\,(gr_h)+(Bh\,gh\,(gp_h)+(2\,(Bh_h)\,gh-Bh\,(gh_h))\,gp)\,gr\right)\,gt}{2\,gh^2\,gp\,gr\,gt}, [ridotto, 4]\right]$$

I due metodi, quello standard e quello specifico del caso debbono dare lo stesso risultato. Infatti...

```
(%i44) ratsimp(xssb[1]-scab[1]);
(%o44) 0
```

Ora lavoro su tensori del secondo ordine...

```
(%i45) depends([a11,a12,a13,a14,a21,a22,a23,a24,
       a31,a32,a33,a34,a41,a42,a43,a44],ct_coords);
```

(%o45) [a11(t,r,h,p), a12(t,r,h,p), a13(t,r,h,p), a14(t,r,h,p), a21(t,r,h,p), a22(t,r,h,p), a23(t,r,h,p), a24(t,r,h,p), a31(t,r,h,p), a32(t,r,h,p), a33(t,r,h,p), a34(t,r,h,p), a41(t,r,h,p), a42(t,r,h,p), a43(t,r,h,p), a44(t,r,h,p)]

```
(%i46) mat:matrix(
          [a11,a12,a13,a14],
          [a21,a22,a23,a24],
          [a31,a32,a33,a34],
          [a41,a42,a43,a44]);
```

(%o46) $\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{bmatrix}$

```
(%i47) tsmat:tmat11(mat+transpose(mat),metrica);
```

(%o47) $[\begin{bmatrix} 2\,a11 & a21+a12 & a31+a13 & a41+a14 \\ a21+a12 & 2\,a22 & a32+a23 & a42+a24 \\ a31+a13 & a32+a23 & 2\,a33 & a43+a34 \\ a41+a14 & a42+a24 & a43+a34 & 2\,a44 \end{bmatrix}, [1,1,(tm11),4]]$

```
(%i48) tamat:tmat11(mat-transpose(mat),metrica);
```

(%o48) $[\begin{bmatrix} 0 & a12-a21 & a13-a31 & a14-a41 \\ a21-a12 & 0 & a23-a32 & a24-a42 \\ a31-a13 & a32-a23 & 0 & a34-a43 \\ a41-a14 & a42-a24 & a43-a34 & 0 \end{bmatrix}, [1,1,(tm11),4]]$

Ridefinisco qui varie funzioni già presenti
nella libreria per poterle modificare facendo
delle stampe intermedie.

```
(%i49) xsomma(tena,tenb):=block(
          [oa,ob,na,nb,ina,inb,stop],
          if not(tensorp(tena)) then
             return("Errore: primo arg. non tensore"),
          if not(tensorp(tenb)) then
             return("Errore: secondo arg. non tensore"),
          oa:ordine(tena), ob:ordine(tenb),
          if oa#ob then
             return("Errore: tensori di ordine diverso"),
          na:dimensione(tena),  nb:dimensione(tenb),
          if na#nb then
             return("Errore: tensori di dimensione diversa"),
          ina:indici(tena), inb:indici(tenb),
          stop:false,
          for j:1 thru oa do if mod(ina[j]+inb[j],2)=1
              then stop:true,
          if stop then
             return("Errore: indici incongruenti"),
          append(rest(tena,-1)+rest(tenb,-1),
             [append(ina,["(Somma tensori)",na])])
          )$
```

```
(%i50) xprod(scala,tenb):=block(
          [oa,ob,na,nb,inb],
          if not(tensorp(scala)) then
             return("Errore: primo arg. non tensore"),
          if not(tensorp(tenb)) then
             return("Errore: secondo arg. non tensore"),
          oa:ordine(scala), ob:ordine(tenb),
          if oa#0 then
             return("Errore: non scalare"),
          na:dimensione(scala),  nb:dimensione(tenb),
          if na#nb then
             return("Errore: tensori di dimensione diversa"),
          inb:indici(tenb),
          append(scala[1]*rest(tenb,-1),[append(indici(tenb),
             ["(Prodotto scalare*tensore)",nb])])
          )$
```

```
(%i51) xtsca(sc,metrica):=block([],
           [sc,["(scal)",dimensione(metrica[2])]])$
```

```
(%i52) xtcov(lv,metrica):=block([nl,nd],
           if not(listp(lv)) then
              return("Non lista"),
           nl:length(lv),
           nd:dimensione(metrica[2]),
           [ makelist(lv[1+mod(j-1,nl)],j,1,nd),
             [2,"(v2)",nd]])$
```

```
(%i53) xtcontrov(lv,metrica):=block([nl,nd],
         if not(listp(lv)) then
            return("Non lista"),
         nl:length(lv),
         nd:dimensione(metrica[2]),
         [ makelist(lv[1+mod(j-1,nl)],j,1,nd),
           [1,"(v1)",nd]])$
```

```
(%i54) xtmat11(mat,metrica):=block([],
         if not(matrixp(mat)) then
            return("Non matrice"),
         [mat,[1,1,"(tm11)",dimensione(metrica[2])]])$
```

```
(%i55) xtmat12(mat,metrica):=block([],
         if not(matrixp(mat)) then
            return("Non matrice"),
         [mat,[1,2,"(tm12)",dimensione(metrica[2])]])$
```

```
(%i56) xtmat21(mat,metrica):=block([],
         if not(matrixp(mat)) then
            return("Non matrice"),
         [mat,[2,1,"(tm11)",dimensione(metrica[2])]])$
```

```
(%i57) xtmat22(mat,metrica):=block([],
         if not(matrixp(mat)) then
            return("Non matrice"),
         [mat,[2,2,"(tm22)",dimensione(metrica[2])]])$
```

```
(%i58) xtcov([1,2,3],metrica);
```

(%o58) $[[1,2,3,1],[2,(v2),4]]$

```
(%i59) xtcontrov([1,2,3],metrica);
```

(%o59) $[[1,2,3,1],[1,(v1),4]]$

```
(%i60) tab:tsomma(tamat,tsmat);
```

(%o60) $\left[\begin{bmatrix} 2\,a11 & 2\,a12 & 2\,a13 & 2\,a14 \\ 2\,a21 & 2\,a22 & 2\,a23 & 2\,a24 \\ 2\,a31 & 2\,a32 & 2\,a33 & 2\,a34 \\ 2\,a41 & 2\,a42 & 2\,a43 & 2\,a44 \end{bmatrix}, [1,1,(Somma\ tensori),4]\right]$

```
(%i61) tprod(tsca(1/2,metrica),tab);
```

(%o61) $\left[\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{bmatrix}, [1,1,(Prodotto\ scalare*tensore),4]\right]$