

Prove varie di <http://maxima.sourceforge.net>

Innanzitutto estendo il path in modo che sia accessibile anche la cartella C:\xmaxima\
 Notare che in Maxima non si deve usare la controbarra ma la barra...

```
(%i1) (if atom(path_iniziale) then path_iniziale:file_search_maxima)$
```

```
(%i2) file_search_maxima : cons(
      sconcat("C:/xmaxima/###.{lisp,mac,mc}"), path_iniziale)$
```

Uso il pacchetto ctensor per studiare la metrica di Kerr e Newman ossia la metrica del buco nero carico e rotante (la più generale).
 La metrica data qui... non è quella (fisicamente equivalente) detta di Kerr Newman Schild caratterizzata dal fatto di avere il determinante del tensore metrico costante ed uguale a -1.

```
(%i3) ( if atom(lg) then load(ctensor) );
(%o3)
C:/Programmi/Maxima-5.20.1/share/maxima/5.20.1/share/tensor/ctensor.mac
```

Uso una delle metriche preconfezionate ossia appunto quella di Schwarzschild.

```
(%i4) ct_coordsys(kerr_newman);
(%o4) done
```

Il tensore metrico covariante pertanto è questo:

```
(%i5) lg;
(%o5)


|                                                                                 |                                                            |                            |                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{a^2 \sin(\theta)^2 - r^2 + 2 m r - e^2 - a^2}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$ | 0                                                          | 0                          | $\frac{a (e^2 - 2 m r) \sin(\theta)}{a^2 \cos(\theta)}$                       |
| 0                                                                               | $\frac{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}{r^2 - 2 m r + e^2 + a^2}$ | 0                          | 0                                                                             |
| 0                                                                               | 0                                                          | $a^2 \cos(\theta)^2 + r^2$ | 0                                                                             |
| $\frac{a (e^2 - 2 m r) \sin(\theta)^2}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$               | 0                                                          | 0                          | $\frac{\sin(\theta)^2 ((r^2 + a^2)^2 - a^2 (r^2 - 2 m r))}{a^2 \cos(\theta)}$ |


```

Il tensore metrico covariante lg è memorizzato come una matrice ovviamente simmetrica. Verifichiamolo:

```
(%i6) matrixp(lg);
(%o6) true
```

Tener presente che la numerazione delle matrici parte da 1.

⌈ Innanzi tutto si constata che il determinante della matrice lg è una funzione di r e di theta.

```
⌈ (%i7) menogdet:-trigsimp(determinant(lg));
  (%o7) -a4 cos(theta)6 -(2 a2 r2 - a4) cos(theta)4 -(r4 - 2 a2 r2) cos(theta)2 + r4
```

⌈ Le componenti non nulle di lg sono:

```
⌈ (%i8) lg[1,1];
  (%o8) 
$$\frac{a^2 \sin(\theta)^2 - r^2 + 2 m r - e^2 - a^2}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$$

```

```
⌈ (%i9) lg[2,2];
  (%o9) 
$$\frac{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}{r^2 - 2 m r + e^2 + a^2}$$

```

```
⌈ (%i10) lg[3,3];
  (%o10) a2 cos(theta)2 + r2
```

```
⌈ (%i11) lg[4,4];
  (%o11) 
$$\frac{\sin(\theta)^2 ((r^2 + a^2)^2 - a^2 (r^2 - 2 m r + e^2 + a^2) \sin(\theta)^2)}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$$

```

⌈ Se a non è nulla ossia se la rotazione esiste effettivamente non è nullo il seguente termine non diagonale:

```
⌈ (%i12) lg[1,4];
  (%o12) 
$$\frac{a (e^2 - 2 m r) \sin(\theta)^2}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$$

```

⌈ Quali simboli usa come variabili del tensore metrico.... ovviamente:

```
⌈ (%i13) ct_coords;
  (%o13) [ct, r, theta, phi]
```

⌈ Calcolo ug (il tensore metrico controvariante)

```
⌈ (%i14) cmetric();
  (%o14) done
```

```
⌈ (%i15) ug:trigsimp(ug)$
```

```
(%i16) ug;
(%o16)

$$\begin{bmatrix} \frac{(a^2 r^2 - 2 a^2 m r + a^2 e^2 + a^4) \cos(\theta)^2 + r^4 + a^2 r^2 + 2 a^2 m r - a^2 e^2}{(a^2 r^2 - 2 a^2 m r + a^2 e^2 + a^4) \cos(\theta)^2 + r^4 - 2 m r^3 + (e^2 + a^2) r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2 - 2 m r + e^2 + a^2}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2} \\ \frac{2 a m r - a e^2}{(a^2 r^2 - 2 a^2 m r + a^2 e^2 + a^4) \cos(\theta)^2 + r^4 - 2 m r^3 + (e^2 + a^2) r^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```

Il determinante di ug è ovviamente l'inverso di quello di lg.

```
(%i17) trigsimp(determinant(ug));
(%o17)  $\frac{1}{a^4 \cos(\theta)^6 + (2 a^2 r^2 - a^4) \cos(\theta)^4 + (r^4 - 2 a^2 r^2) \cos(\theta)^2 - r^4}$ 
```

```
(%i18) ug[1,1];
(%o18)  $\frac{(a^2 r^2 - 2 a^2 m r + a^2 e^2 + a^4) \cos(\theta)^2 + r^4 + a^2 r^2 + 2 a^2 m r - a^2 e^2}{(a^2 r^2 - 2 a^2 m r + a^2 e^2 + a^4) \cos(\theta)^2 + r^4 - 2 m r^3 + (e^2 + a^2) r^2}$ 
```

```
(%i19) ug[2,2];
(%o19)  $\frac{r^2 - 2 m r + e^2 + a^2}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$ 
```

```
(%i20) ug[3,3];
(%o20)  $\frac{1}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$ 
```

```
(%i21) ug[4,4];
(%o21)  $-(a^2 \cos(\theta)^2 + r^2 - 2 m r + e^2) / ((a^2 r^2 - 2 a^2 m r + a^2 e^2 + a^4) \cos(\theta)^4 + (r^4 - 2 m r^3 + e^2 r^2 + 2 a^2 m r - a^2 e^2 - a^4) \cos(\theta)^2 - r^4 + 2 m r^3 + (-e^2 - a^2) r^2)$ 
```

```
(%i22) ug[1,4];
(%o22)  $-\frac{2 a m r - a e^2}{(a^2 r^2 - 2 a^2 m r + a^2 e^2 + a^4) \cos(\theta)^2 + r^4 - 2 m r^3 + (e^2 + a^2) r^2}$ 
```

```
(%i23) trigsimp(ug.lg);
(%o23)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

I simboli di Christoffel di prima e seconda specie. Specificando all li visualizzo tutti.

```
(%i24) christof(false);
(%o24) done
```

```
(%i25) lcs:trigsimp(lcs);
(%o25) lcs
```

```
(%i26) lcs[2,1,4];
(%o26) 
$$\frac{2 a m \sin(\theta)^2 - 2 a r (e^2 - 2 m r) \sin(\theta)^2}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2 (a^2 \cos(\theta)^2 + r^2)^2} \cdot 2$$

```

```
(%i27) lcs[1,2,4]-lcs[2,1,4];
(%o27) 0
```

Chiedo informazioni sulla array lcs (simboli di prima specie)

```
(%i28) arrayinfo(lcs);
(%o28) [hashed, 3, [1, 1, 1], [1, 1, 2], [1, 1, 3], [1, 1, 4], [1, 2, 1], [1, 2, 2], [1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 3, 1], [1, 3, 2], [1, 3, 3], [1, 3, 4], [1, 4, 1], [1, 4, 2], [1, 4, 3], [1, 4, 4], [2, 1, 1], [2, 1, 2], [2, 1, 3], [2, 1, 4], [2, 2, 1], [2, 2, 2], [2, 2, 3], [2, 2, 4], [2, 3, 1], [2, 3, 2], [2, 3, 3], [2, 3, 4], [2, 4, 1], [2, 4, 2], [2, 4, 3], [2, 4, 4], [3, 1, 1], [3, 1, 2], [3, 1, 3], [3, 1, 4], [3, 2, 1], [3, 2, 2], [3, 2, 3], [3, 2, 4], [3, 3, 1], [3, 3, 2], [3, 3, 3], [3, 3, 4], [3, 4, 1], [3, 4, 2], [3, 4, 3], [3, 4, 4], [4, 1, 1], [4, 1, 2], [4, 1, 3], [4, 1, 4], [4, 2, 1], [4, 2, 2], [4, 2, 3], [4, 2, 4], [4, 3, 1], [4, 3, 2], [4, 3, 3], [4, 3, 4], [4, 4, 1], [4, 4, 2], [4, 4, 3], [4, 4, 4]]
```

```
(%i29) mcs:trigsimp(mcs);
(%o29) mcs
```

```
(%i30) mcs[1,1,1];
(%o30) 0
```

```
(%i31) trigsimp(mcs[1,1,2]);
(%o31) 
$$-((a^2 m r^2 - 2 a^2 m^2 r + (a^2 e^2 + a^4) m) \cos(\theta)^2 - m r^4 + (2 m^2 + e^2) r^3 + (-3 e^2 - a^2) m r^2 + (e^4 + a^2 e^2) r) / (a^6 \cos(\theta)^6 + 3 a^4 r^2 \cos(\theta)^4 + 3 a^2 r^4 \cos(\theta)^2 + r^6)$$

```

```
(%i32) mcs[1,1,3];
(%o32) 
$$\frac{a^4 \cos(\theta) \sin(\theta)^3 + (a^4 \cos(\theta)^3 + (2 a^2 m r - a^2 e^2 - a^4) \cos(\theta)) \sin(\theta)}{a^6 \cos(\theta)^6 + 3 a^4 r^2 \cos(\theta)^4 + 3 a^2 r^4 \cos(\theta)^2 + r^6}$$

```

```
(%i33) mcs[1,1,4];
(%o33) 0
```

```
(%i34) trigsimp(mcs[1,2,1]);
(%o34) - ((a^2 m r^2 + a^4 m) cos(theta)^2 - m r^4 + e^2 r^3 - a^2 m r^2 + a^2 e^2 r) / (
(a^4 r^2 - 2 a^4 m r + a^4 e^2 + a^6) cos(theta)^4 + (2 a^2 r^4 - 4 a^2 m r^3 + (2 a^2 e^2 + 2 a^4) r^2)
cos(theta)^2 + r^6 - 2 m r^5 + (e^2 + a^2) r^4)
```

```
(%i35) mcs[1,2,1]-mcs[2,1,1];
(%o35) 0
```

```
(%i36) mcs[1,2,2];
(%o36) 0
```

```
(%i37) mcs[1,2,3];
(%o37) 0
```

```
(%i38) trigsimp(mcs[1,2,4]);
(%o38) (a^5 m sin(theta)^6 + (-a^3 e^2 r - 2 a^5 m) sin(theta)^4 +
(-a m r^4 + a e^2 r^3 + a^3 e^2 r + a^5 m) sin(theta)^2) / ((a^6 r^2 - 2 a^6 m r + a^6 e^2 + a^8)
cos(theta)^8 + (3 a^4 r^4 - 6 a^4 m r^3 + (3 a^4 e^2 + 2 a^6) r^2 + 2 a^6 m r - a^6 e^2 - a^8)
cos(theta)^6 + (3 a^2 r^6 - 6 a^2 m r^5 + 3 a^2 e^2 r^4 + 6 a^4 m r^3 + (-3 a^4 e^2 - 3 a^6) r^2)
cos(theta)^4 + (r^8 - 2 m r^7 + (e^2 - 2 a^2) r^6 + 6 a^2 m r^5 + (-3 a^2 e^2 - 3 a^4) r^4) cos(theta)^2
-r^8 + 2 m r^7 + (-e^2 - a^2) r^6)
```

```
(%i39) mcs[2,1,4]-mcs[1,2,4];
(%o39) 0
```

```
(%i40) trigsimp(mcs[1,3,1]);
(%o40) (2 a^2 m r - a^2 e^2) cos(theta) sin(theta)
-----
a^4 cos(theta)^4 + 2 a^2 r^2 cos(theta)^2 + r^4
```

```
(%i41) mcs[3,1,1]-mcs[1,3,1];
(%o41) 0
```

```
(%i42) mcs[1,3,2];
(%o42) 0
```

```
(%i43) mcs[1,3,3];
(%o43) 0
```

```
(%i44) mcs[1,3,4];
(%o44) ((2 a^3 m r - a^3 e^2) cos(theta) sin(theta)^3 +
((4 a^3 m r - 2 a^3 e^2) cos(theta)^3 + (2 a m r^3 - a e^2 r^2 - 2 a^3 m r + a^3 e^2) cos(theta))
sin(theta)) / (a^6 cos(theta)^8 + (3 a^4 r^2 - a^6) cos(theta)^6 + (3 a^2 r^4 - 3 a^4 r^2)
cos(theta)^4 + (r^6 - 3 a^2 r^4) cos(theta)^2 - r^6)

(%i45) mcs[3,1,4]-mcs[1,3,4];
(%o45) 0

(%i46) mcs[1,4,1];
(%o46) 0

(%i47) mcs[1,4,2];
(%o47) (((a^3 m r^2 - 2 a^3 m^2 r + (a^3 e^2 + a^5) m) cos(theta)^2 - a m r^4 + (2 a m^2 + a e^2) r^3
+ (-3 a e^2 - a^3) m r^2 + (a e^4 + a^3 e^2) r) sin(theta)^2) / (a^6 cos(theta)^6 + 3 a^4 r^2
cos(theta)^4 + 3 a^2 r^4 cos(theta)^2 + r^6)

(%i48) mcs[4,1,2]-mcs[1,4,2];
(%o48) 0

(%i49) mcs[1,4,3];
(%o49) ((2 a^3 m r - a^3 e^2) cos(theta) sin(theta)^3 +
((2 a^3 m r - a^3 e^2) cos(theta)^3 + (2 a m r^3 - a e^2 r^2) cos(theta)) sin(theta)) / (a^6
cos(theta)^6 + 3 a^4 r^2 cos(theta)^4 + 3 a^2 r^4 cos(theta)^2 + r^6)

(%i50) mcs[4,1,3]-mcs[1,4,3];
(%o50) 0

(%i51) mcs[1,4,4];
(%o51) 0

(%i52) trigsimp(mcs[2,1,1]);
(%o52) -((a^2 m r^2 + a^4 m) cos(theta)^2 - m r^4 + e^2 r^3 - a^2 m r^2 + a^2 e^2 r) / (
(a^4 r^2 - 2 a^4 m r + a^4 e^2 + a^6) cos(theta)^4 + (2 a^2 r^4 - 4 a^2 m r^3 + (2 a^2 e^2 + 2 a^4) r^2)
cos(theta)^2 + r^6 - 2 m r^5 + (e^2 + a^2) r^4)

(%i53) mcs[2,1,1]-mcs[1,2,1];
(%o53) 0

(%i54) trigsimp(mcs[2,1,2]);
(%o54) 0

(%i55) trigsimp(mcs[2,1,3]);
(%o55) 0
```

```
(%i56) trigsimp(mcs[2,1,4]);
(%o56) (a^5 m sin(theta)^6 + (-a^3 e^2 r - 2 a^5 m) sin(theta)^4 +
(-a m r^4 + a e^2 r^3 + a^3 e^2 r + a^5 m) sin(theta)^2) / ((a^6 r^2 - 2 a^6 m r + a^6 e^2 + a^8)
cos(theta)^8 + (3 a^4 r^4 - 6 a^4 m r^3 + (3 a^4 e^2 + 2 a^6) r^2 + 2 a^6 m r - a^6 e^2 - a^8)
cos(theta)^6 + (3 a^2 r^6 - 6 a^2 m r^5 + 3 a^2 e^2 r^4 + 6 a^4 m r^3 + (-3 a^4 e^2 - 3 a^6) r^2)
cos(theta)^4 + (r^8 - 2 m r^7 + (e^2 - 2 a^2) r^6 + 6 a^2 m r^5 + (-3 a^2 e^2 - 3 a^4) r^4) cos(theta)^2
-r^8 + 2 m r^7 + (-e^2 - a^2) r^6)

(%i57) mcs[1,2,4]-mcs[2,1,4];
(%o57) 0

(%i58) mcs[2,2,1];
(%o58) 0

(%i59) mcs[2,2,2];
(%o59) 
$$\frac{(a^2 r - a^2 m) \cos(\theta)^2 + m r^2 + (-e^2 - a^2) r}{(a^2 r^2 - 2 a^2 m r + a^2 e^2 + a^4) \cos(\theta)^2 + r^4 - 2 m r^3 + (e^2 + a^2) r^2}$$


(%i60) mcs[2,2,3];
(%o60) 
$$\frac{a^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{(a^2 r^2 - 2 a^2 m r + a^2 e^2 + a^4) \cos(\theta)^2 + r^4 - 2 m r^3 + (e^2 + a^2) r^2}$$


(%i61) mcs[2,2,4];
(%o61) 0

(%i62) mcs[2,3,1];
(%o62) 0

(%i63) mcs[2,3,2];
(%o63) 
$$\frac{a^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$$


(%i64) mcs[3,2,2]-mcs[2,3,2];
(%o64) 0

(%i65) mcs[2,3,3];
(%o65) 
$$\frac{r}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$$


(%i66) mcs[3,2,3]-mcs[2,3,3];
(%o66) 0

(%i67) mcs[2,3,4];
(%o67) 0
```

```
(%i68) trigsimp(mcs[2,4,1]);
(%o68) -((a^5 m r^2 - a^5 e^2 r - a^7 m) sin(theta)^6 +
(-4 a^3 m r^4 + 3 a^3 e^2 r^3 - 2 a^5 m r^2 + 3 a^5 e^2 r + 2 a^7 m) sin(theta)^4 +
(3 a m r^6 - 2 a e^2 r^5 + 5 a^3 m r^4 - 4 a^3 e^2 r^3 + a^5 m r^2 - 2 a^5 e^2 r - a^7 m) sin(theta)^2) / (
(a^6 r^2 - 2 a^6 m r + a^6 e^2 + a^8) cos(theta)^6 + (3 a^4 r^4 - 6 a^4 m r^3 + (3 a^4 e^2 + 3 a^6) r^2)
cos(theta)^4 + (3 a^2 r^6 - 6 a^2 m r^5 + (3 a^2 e^2 + 3 a^4) r^4) cos(theta)^2 + r^8 - 2 m r^7 +
(e^2 + a^2) r^6)

(%i69) mcs[4,2,1]-mcs[2,4,1];
(%o69) 0

(%i70) trigsimp(mcs[2,4,2]);
(%o70) 0

(%i71) trigsimp(mcs[2,4,3]);
(%o71) 0

(%i72) trigsimp(mcs[2,4,4]);
(%o72) ((a^4 r - a^4 m) cos(theta)^4 + (2 a^2 r^3 - a^2 m r^2 + a^4 m) cos(theta)^2 + r^5 - 2 m r^4
+ e^2 r^3 - a^2 m r^2 + a^2 e^2 r) / ((a^4 r^2 - 2 a^4 m r + a^4 e^2 + a^6) cos(theta)^4 +
(2 a^2 r^4 - 4 a^2 m r^3 + (2 a^2 e^2 + 2 a^4) r^2) cos(theta)^2 + r^6 - 2 m r^5 + (e^2 + a^2) r^4)

(%i73) mcs[4,2,4]-mcs[2,4,4];
(%o73) 0

(%i74) msc[3,1,1];
(%o74) msc3,1,1

(%i75) msc[3,1,2];
(%o75) msc3,1,2

(%i76) msc[3,1,3];
(%o76) msc3,1,3

(%i77) msc[3,1,4];
(%o77) msc3,1,4

(%i78) msc[3,2,1];
(%o78) msc3,2,1

(%i79) mcs[3,2,2];
(%o79) 
$$-\frac{a^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$$

```


(%i80) mcs[2,3,2]-mcs[3,2,2];
 (%o80) 0

(%i81) mcs[3,2,3];
 (%o81) $\frac{r}{a^2 \cos(\text{theta})^2 + r^2}$

(%i82) mcs[2,3,3]-mcs[3,2,3];
 (%o82) 0

(%i83) mcs[3,2,4];
 (%o83) 0

(%i84) mcs[3,3,1];
 (%o84) 0

(%i85) mcs[3,3,2];
 (%o85) $-\frac{r^3 - 2 m r^2 + (e^2 + a^2) r}{a^2 \cos(\text{theta})^2 + r^2}$

(%i86) mcs[3,3,3];
 (%o86) $-\frac{a^2 \cos(\text{theta}) \sin(\text{theta})}{a^2 \cos(\text{theta})^2 + r^2}$

(%i87) mcs[3,3,4];
 (%o87) 0

(%i88) mcs[3,4,1];
 (%o88) $((2 a^5 m r - a^5 e^2) \cos(\text{theta}) \sin(\text{theta})^5 + ((6 a^5 m r - 3 a^5 e^2) \cos(\text{theta})^3 + (4 a^3 m r^3 - 2 a^3 e^2 r^2 - 2 a^5 m r + a^5 e^2) \cos(\text{theta})) \sin(\text{theta})^3 + ((2 a^5 m r - a^5 e^2) \cos(\text{theta})^5 + (2 a^3 m r^3 - a^3 e^2 r^2 - 2 a^5 m r + a^5 e^2) \cos(\text{theta})^3 + (a^3 e^2 r^2 - 2 a^3 m r^3) \cos(\text{theta})) \sin(\text{theta})) / (a^6 \cos(\text{theta})^6 + 3 a^4 r^2 \cos(\text{theta})^4 + 3 a^2 r^4 \cos(\text{theta})^2 + r^6)$

(%i89) mcs[4,3,1]-mcs[3,4,1];
 (%o89) 0

(%i90) mcs[3,4,2];
 (%o90) 0

(%i91) mcs[3,4,3];
 (%o91) 0

```

(%i92) trigsimp(mcs[3,4,4]);
(%o92) - ((a^4 r^2 - 2 a^4 m r + a^4 e^2 + a^6) cos(theta)^5 +
(2 a^2 r^4 - 6 a^2 m r^3 + (4 a^2 m^2 + 3 a^2 e^2 + 2 a^4) r^2 + (-4 a^2 e^2 - 2 a^4) m r + a^2 e^4 + a^4 e^2)
cos(theta)^3 + (r^6 - 2 m r^5 + (e^2 + a^2) r^4 + 2 a^2 m r^3 + (-4 a^2 m^2 - a^2 e^2) r^2 +
(4 a^2 e^2 + 2 a^4) m r - a^2 e^4 - a^4 e^2) cos(theta)) sin(theta)) / (
(a^4 r^2 - 2 a^4 m r + a^4 e^2 + a^6) cos(theta)^6 +
(2 a^2 r^4 - 4 a^2 m r^3 + (2 a^2 e^2 + a^4) r^2 + 2 a^4 m r - a^4 e^2 - a^6) cos(theta)^4 +
(r^6 - 2 m r^5 + (e^2 - a^2) r^4 + 4 a^2 m r^3 + (-2 a^2 e^2 - 2 a^4) r^2) cos(theta)^2 - r^6 + 2 m r^5 +
(-e^2 - a^2) r^4)

(%i93) mcs[4,3,4]-mcs[3,4,4];
(%o93) 0

(%i94) mcs[4,1,1];
(%o94) 0

(%i95) mcs[4,1,2];
(%o95) ((a^3 m r^2 - 2 a^3 m^2 r + (a^3 e^2 + a^5) m) cos(theta)^2 - a m r^4 + (2 a m^2 + a e^2) r^3
+ (-3 a e^2 - a^3) m r^2 + (a e^4 + a^3 e^2) r) sin(theta)^2) / (a^6 cos(theta)^6 + 3 a^4 r^2
cos(theta)^4 + 3 a^2 r^4 cos(theta)^2 + r^6)

(%i96) mcs[1,4,2]-mcs[4,1,2];
(%o96) 0

(%i97) mcs[4,1,3];
(%o97) ((2 a^3 m r - a^3 e^2) cos(theta) sin(theta)^3 +
((2 a^3 m r - a^3 e^2) cos(theta)^3 + (2 a m r^3 - a e^2 r^2) cos(theta)) sin(theta)) / (a^6
cos(theta)^6 + 3 a^4 r^2 cos(theta)^4 + 3 a^2 r^4 cos(theta)^2 + r^6)

(%i98) mcs[1,4,3]-mcs[4,1,3];
(%o98) 0

(%i99) mcs[4,1,4];
(%o99) 0

(%i100) trigsimp(mcs[4,2,1]);
(%o100) - ((a^5 m r^2 - a^5 e^2 r - a^7 m) sin(theta)^6 +
(-4 a^3 m r^4 + 3 a^3 e^2 r^3 - 2 a^5 m r^2 + 3 a^5 e^2 r + 2 a^7 m) sin(theta)^4 +
(3 a m r^6 - 2 a e^2 r^5 + 5 a^3 m r^4 - 4 a^3 e^2 r^3 + a^5 m r^2 - 2 a^5 e^2 r - a^7 m) sin(theta)^2) / (
(a^6 r^2 - 2 a^6 m r + a^6 e^2 + a^8) cos(theta)^6 + (3 a^4 r^4 - 6 a^4 m r^3 + (3 a^4 e^2 + 3 a^6) r^2)
cos(theta)^4 + (3 a^2 r^6 - 6 a^2 m r^5 + (3 a^2 e^2 + 3 a^4) r^4) cos(theta)^2 + r^8 - 2 m r^7 +
(e^2 + a^2) r^6)

```

```
(%i101) mcs[2,4,1]-mcs[4,2,1];
(%o101) 0
```

```
(%i102) trigsimp(mcs[4,3,4]);
(%o102) - ((a^4 r^2 - 2 a^4 m r + a^4 e^2 + a^6) cos(theta)^5 +
(2 a^2 r^4 - 6 a^2 m r^3 + (4 a^2 m^2 + 3 a^2 e^2 + 2 a^4) r^2 + (-4 a^2 e^2 - 2 a^4) m r + a^2 e^4 + a^4 e^2)
cos(theta)^3 + (r^6 - 2 m r^5 + (e^2 + a^2) r^4 + 2 a^2 m r^3 + (-4 a^2 m^2 - a^2 e^2) r^2 +
(4 a^2 e^2 + 2 a^4) m r - a^2 e^4 - a^4 e^2) cos(theta)) sin(theta)) / (
(a^4 r^2 - 2 a^4 m r + a^4 e^2 + a^6) cos(theta)^6 +
(2 a^2 r^4 - 4 a^2 m r^3 + (2 a^2 e^2 + a^4) r^2 + 2 a^4 m r - a^4 e^2 - a^6) cos(theta)^4 +
(r^6 - 2 m r^5 + (e^2 - a^2) r^4 + 4 a^2 m r^3 + (-2 a^2 e^2 - 2 a^4) r^2) cos(theta)^2 - r^6 + 2 m r^5 +
(-e^2 - a^2) r^4)
```

```
(%i103) mcs[3,4,4]-mcs[4,3,4];
(%o103) 0
```

```
(%i104) mcs[4,4,1];
(%o104) 0
```

```
(%i105) trigsimp(mcs[4,4,2]);
(%o105) - ((a^4 r^3 - 3 a^4 m r^2 + (2 a^4 m^2 + a^4 e^2 + a^6) r + (-a^4 e^2 - a^6) m) sin(theta)^6 + (
-2 a^2 r^5 + 3 a^2 m r^4 + (2 a^2 m^2 - a^2 e^2 - 4 a^4) r^3 + (4 a^4 - 3 a^2 e^2) m r^2 +
(-2 a^4 m^2 + a^2 e^4 - a^4 e^2 - 2 a^6) r + (a^4 e^2 + a^6) m) sin(theta)^4 +
(r^7 - 2 m r^6 + (e^2 + 3 a^2) r^5 - 4 a^2 m r^4 + (2 a^2 e^2 + 3 a^4) r^3 - 2 a^4 m r^2 + (a^4 e^2 + a^6) r)
sin(theta)^2) / (a^6 cos(theta)^6 + 3 a^4 r^2 cos(theta)^4 + 3 a^2 r^4 cos(theta)^2 + r^6)
```

```
(%i106) trigsimp(mcs[4,4,3]);
(%o106) - ((a^4 r^2 - 2 a^4 m r + a^4 e^2 + a^6) cos(theta)^5 +
(2 a^2 r^4 - 4 a^2 m r^3 + (2 a^2 e^2 + 2 a^4) r^2) cos(theta)^3 +
(r^6 + a^2 r^4 + 4 a^2 m r^3 - 2 a^2 e^2 r^2 + 2 a^4 m r - a^4 e^2) cos(theta)) sin(theta)) / (a^6
cos(theta)^6 + 3 a^4 r^2 cos(theta)^4 + 3 a^2 r^4 cos(theta)^2 + r^6)
```

```
(%i107) trigsimp(mcs[4,4,4]);
(%o107) 0
```

```
Chiedo informazioni sulla array mcs ( simboli di seconda specie )
Usa la convenzione di scrivere il termine controvariante come ultimo.
```

```
(%i108) arrayinfo(mcs);
(%o108) [hashed, 3, [1, 1, 1], [1, 1, 2], [1, 1, 3], [1, 1, 4], [1, 2, 1], [1, 2, 2], [1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 3, 1], [1, 3, 2], [1, 3, 3], [1, 3, 4], [1, 4, 1], [1, 4, 2], [1, 4, 3], [1, 4, 4], [2, 1, 1], [2, 1, 2], [2, 1, 3], [2, 1, 4], [2, 2, 1], [2, 2, 2], [2, 2, 3], [2, 2, 4], [2, 3, 1], [2, 3, 2], [2, 3, 3], [2, 3, 4], [2, 4, 1], [2, 4, 2], [2, 4, 3], [2, 4, 4], [3, 1, 1], [3, 1, 2], [3, 1, 3], [3, 1, 4], [3, 2, 1], [3, 2, 2], [3, 2, 3], [3, 2, 4], [3, 3, 1], [3, 3, 2], [3, 3, 3], [3, 3, 4], [3, 4, 1], [3, 4, 2], [3, 4, 3], [3, 4, 4], [4, 1, 1], [4, 1, 2], [4, 1, 3], [4, 1, 4], [4, 2, 1], [4, 2, 2], [4, 2, 3], [4, 2, 4], [4, 3, 1], [4, 3, 2], [4, 3, 3], [4, 3, 4], [4, 4, 1], [4, 4, 2], [4, 4, 3], [4, 4, 4]]
```

Ora calcolo il tensore di Riemann a quattro indici, visualizzandone solo quelli di valore non nullo (scrivendo true ma la stampa e' troppo lunga).

```
(%i109) riemann(false);
(%o109) done
```

Calcola il tensore di Ricci che dovrebbe essere identicamente nullo ma siccome non fa semplificazioni viene cosi'....

```
(%i110) ricci(false);
(%o110) done
```

Trasformo l'array ric in una lista per vederla in modo convenzionale

```
(%i111) listaric:trigsimp(listarray(ric));
(%o111) [(a^8 e^2 sin(theta)^10 + (-2 a^6 e^2 r^2 - 2 a^6 e^2 m r + a^6 e^4 - 2 a^8 e^2)
sin(theta)^8 + (6 a^4 e^2 m r^3 - 3 a^4 e^4 r^2 + 6 a^6 e^2 m r - 3 a^6 e^4) sin(theta)^6 + (2 a^2 e^2
r^6 - 6 a^2 e^2 m r^5 + (3 a^2 e^4 + 6 a^4 e^2) r^4 - 12 a^4 e^2 m r^3 + (6 a^4 e^4 + 6 a^6 e^2) r^2 - 6 a^6 e^2
m r + 3 a^6 e^4 + 2 a^8 e^2) sin(theta)^4 + (-e^2 r^8 + 2 e^2 m r^7 + (-e^4 - 4 a^2 e^2) r^6 + 6 a^2 e^2 m
r^5 + (-3 a^2 e^4 - 6 a^4 e^2) r^4 + 6 a^4 e^2 m r^3 + (-3 a^4 e^4 - 4 a^6 e^2) r^2 + 2 a^6 e^2 m r - a^6 e^4 -
a^8 e^2) sin(theta)^2) / (a^12 cos(theta)^14 + (6 a^10 r^2 - a^12) cos(theta)^12 +
(15 a^8 r^4 - 6 a^10 r^2) cos(theta)^10 + (20 a^6 r^6 - 15 a^8 r^4) cos(theta)^8 +
(15 a^4 r^8 - 20 a^6 r^6) cos(theta)^6 + (6 a^2 r^10 - 15 a^4 r^8) cos(theta)^4 + (r^12 - 6 a^2 r^10)
cos(theta)^2 - r^12), 0, 0, -((2 a^7 e^2 r^2 - 2 a^7 e^2 m r + a^7 e^4 + 2 a^9 e^2) sin(theta)^10 +
(-6 a^5 e^2 r^4 + 6 a^5 e^2 m r^3 + (-3 a^5 e^4 - 12 a^7 e^2) r^2 + 6 a^7 e^2 m r - 3 a^7 e^4 - 6 a^9 e^2)
sin(theta)^8 + (6 a^3 e^2 r^6 - 6 a^3 e^2 m r^5 + (3 a^3 e^4 + 18 a^5 e^2) r^4 - 12 a^5 e^2 m r^3 +
(6 a^5 e^4 + 18 a^7 e^2) r^2 - 6 a^7 e^2 m r + 3 a^7 e^4 + 6 a^9 e^2) sin(theta)^6 + (-2 a e^2 r^8 + 2 a
e^2 m r^7 + (-a e^4 - 8 a^3 e^2) r^6 + 6 a^3 e^2 m r^5 + (-3 a^3 e^4 - 12 a^5 e^2) r^4 + 6 a^5 e^2 m r^3 +
(-3 a^5 e^4 - 8 a^7 e^2) r^2 + 2 a^7 e^2 m r - a^7 e^4 - 2 a^9 e^2) sin(theta)^4) / (a^12
cos(theta)^14 + (6 a^10 r^2 - a^12) cos(theta)^12 + (15 a^8 r^4 - 6 a^10 r^2) cos(theta)^10 +
(20 a^6 r^6 - 15 a^8 r^4) cos(theta)^8 + (15 a^4 r^8 - 20 a^6 r^6) cos(theta)^6 +
(6 a^2 r^10 - 15 a^4 r^8) cos(theta)^4 + (r^12 - 6 a^2 r^10) cos(theta)^2 - r^12), 0, (a^10 e^2
sin(theta)^14 + (-5 a^8 e^2 r^2 - 5 a^10 e^2) sin(theta)^12 +
(10 a^6 e^2 r^4 + 20 a^8 e^2 r^2 + 10 a^10 e^2) sin(theta)^10 +
(-10 a^4 e^2 r^6 - 30 a^6 e^2 r^4 - 30 a^8 e^2 r^2 - 10 a^10 e^2) sin(theta)^8 +
(5 a^2 e^2 r^8 + 20 a^4 e^2 r^6 + 30 a^6 e^2 r^4 + 20 a^8 e^2 r^2 + 5 a^10 e^2) sin(theta)^6 +
(-e^2 r^10 - 5 a^2 e^2 r^8 - 10 a^4 e^2 r^6 - 10 a^6 e^2 r^4 - 5 a^8 e^2 r^2 - a^10 e^2) sin(theta)^4) / (
(a^12 r^2 - 2 a^12 m r + a^12 e^2 + a^14) cos(theta)^16 +
(6 a^10 r^4 - 12 a^10 m r^3 + (6 a^10 e^2 + 4 a^12) r^2 + 4 a^12 m r - 2 a^12 e^2 - 2 a^14) cos(theta)^14
+ (15 a^8 r^6 - 30 a^8 m r^5 + (15 a^8 e^2 + 3 a^10) r^4 + 24 a^10 m r^3 + (-12 a^10 e^2 - 11 a^12) r^2 - 2
a^12 m r + a^12 e^2 + a^14) cos(theta)^12 + (20 a^6 r^8 - 40 a^6 m r^7 + (20 a^6 e^2 - 10 a^8) r^6 + 60
a^8 m r^5 + (-30 a^8 e^2 - 24 a^10) r^4 - 12 a^10 m r^3 + (6 a^10 e^2 + 6 a^12) r^2) cos(theta)^10 + (
15 a^4 r^10 - 30 a^4 m r^9 + (15 a^4 e^2 - 25 a^6) r^8 + 80 a^6 m r^7 + (-40 a^6 e^2 - 25 a^8) r^6 - 30 a^8
m r^5 + (15 a^8 e^2 + 15 a^10) r^4) cos(theta)^8 + (6 a^2 r^12 - 12 a^2 m r^11 + (6 a^2 e^2 - 24 a^4)
r^10 + 60 a^4 m r^9 + (-30 a^4 e^2 - 10 a^6) r^8 - 40 a^6 m r^7 + (20 a^6 e^2 + 20 a^8) r^6)
cos(theta)^6 + (r^14 - 2 m r^13 + (e^2 - 11 a^2) r^12 + 24 a^2 m r^11 + (3 a^4 - 12 a^2 e^2) r^10 - 30
a^4 m r^9 + (15 a^4 e^2 + 15 a^6) r^8) cos(theta)^4 +
(-2 r^14 + 4 m r^13 + (4 a^2 - 2 e^2) r^12 - 12 a^2 m r^11 + (6 a^2 e^2 + 6 a^4) r^10) cos(theta)^2 + r^14
- 2 m r^13 + (e^2 + a^2) r^12), 0, 0, 0, 0, - (a^10 e^2 sin(theta)^14 + (-5 a^8 e^2 r^2 - 5 a^10 e^2)
sin(theta)^12 + (10 a^6 e^2 r^4 + 20 a^8 e^2 r^2 + 10 a^10 e^2) sin(theta)^10 +
(-10 a^4 e^2 r^6 - 30 a^6 e^2 r^4 - 30 a^8 e^2 r^2 - 10 a^10 e^2) sin(theta)^8 +
(5 a^2 e^2 r^8 + 20 a^4 e^2 r^6 + 30 a^6 e^2 r^4 + 20 a^8 e^2 r^2 + 5 a^10 e^2) sin(theta)^6 +
(-e^2 r^10 - 5 a^2 e^2 r^8 - 10 a^4 e^2 r^6 - 10 a^6 e^2 r^4 - 5 a^8 e^2 r^2 - a^10 e^2) sin(theta)^4) / (
a^12 cos(theta)^16 + (6 a^10 r^2 - 2 a^12) cos(theta)^14 + (15 a^8 r^4 - 12 a^10 r^2 + a^12)
cos(theta)^12 + (20 a^6 r^6 - 30 a^8 r^4 + 6 a^10 r^2) cos(theta)^10 +
(15 a^4 r^8 - 40 a^6 r^6 + 15 a^8 r^4) cos(theta)^8 + (6 a^2 r^10 - 30 a^4 r^8 + 20 a^6 r^6)
```

✓ Ricopio l'array in una matrice. Notare che la numerazione degli elementi della array potrebbe partire da zero ma gli indici con zero non vengono usati per cui il tensore di Ricci è questo, semplificato con la semplificazione trigonometrica:

```
(%i112) matricci: trigsimp(matrix(
    [ ric[1,1],ric[1,2],ric[1,3],ric[1,4]],
    [ ric[2,1],ric[2,2],ric[2,3],ric[2,4]],
    [ ric[3,1],ric[3,2],ric[3,3],ric[3,4]],
    [ ric[4,1],ric[4,2],ric[4,3],ric[4,4]]));
(%o112)

$$\frac{\begin{matrix} a^2 e^2 \sin(\theta)^2 + e^2 r^2 - 2 e^2 m r + e^4 + a^2 e^2 \\ 0 \\ 0 \\ (2 a e^2 r^2 - 2 a e^2 m r + a e^4 + 2 a^3 e^2) \sin(\theta)^2 \end{matrix}}{a^6 \sin(\theta)^6 + (-3 a^4 r^2 - 3 a^6) \sin(\theta)^4 + (3 a^2 r^4 + 6 a^4 r^2 + 3 a^6) \sin(\theta)^2 - r^6 - 3 a^2 r^4 - 3 a^4 r^2 - a^6}$$

```

✓ Se semplifico le espressioni...

✓ L'array ric è di tipo hashed ossia sparsa perché non vengono definiti gli indici della riga 0 e della colonna 0.

```
(%i113) arrayinfo(ric);
(%o113) [hashed, 2, [1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [3, 4], [4, 1], [4, 2], [4, 3], [4, 4]]
```

✓ Questa e' la verifica della metrica di Kerr e Newman.

```
(%i114) matricci[1,1];
(%o114) -(a^2 e^2 sin(theta)^2 + e^2 r^2 - 2 e^2 m r + e^4 + a^2 e^2) / (a^6 sin(theta)^6 + (-3 a^4 r^2 - 3 a^6) sin(theta)^4 + (3 a^2 r^4 + 6 a^4 r^2 + 3 a^6) sin(theta)^2 - r^6 - 3 a^2 r^4 - 3 a^4 r^2 - a^6)
```

```
(%i115) aa:subst(0,a,matricci[1,1]);
(%o115)  $\frac{e^2 r^2 - 2 e^2 m r + e^4}{r^6}$ 
```

✓ Se invece si pone nulla la carica e ma si fa la semplificazione trigonometrica si deve ottenere 0 perché ci si riduce alla metrica di Kerr dove non c'è energia nello spazio attorno al buco nero rotante.

```
(%i116) bb:trigsimp(subst(0,e,matricci[1,1]));
(%o116) 0
```

```
(%i117) matricci[1,2];
(%o117) 0
```

```
(%i118) matricci[1,3];
(%o118) 0
```

```
(%i119) matricci[1,4];
(%o119) ((2 a e^2 r^2 - 2 a e^2 m r + a e^4 + 2 a^3 e^2) sin(theta)^2) / (a^6 sin(theta)^6 +
(-3 a^4 r^2 - 3 a^6) sin(theta)^4 + (3 a^2 r^4 + 6 a^4 r^2 + 3 a^6) sin(theta)^2 - r^6 - 3 a^2 r^4 - 3
a^4 r^2 - a^6)
```

```
(%i120) matricci[2,1];
(%o120) 0
```

```
(%i121) aa:subst(0,a,matricci[2,2]);
(%o121) 
$$\frac{e^2}{-r^4 + 2 m r^3 - e^2 r^2}$$

```

```
(%i122) matricci[2,3];
(%o122) 0
```

```
(%i123) matricci[2,4];
(%o123) 0
```

```
(%i124) aa:subst(0,a,matricci[3,3]);
(%o124) 
$$\frac{e^2}{r^2}$$

```

```
(%i125) aa:subst(0,a,matricci[4,4]);
(%o125) 
$$\frac{e^2 \sin(\theta)^2}{r^2}$$

```

Verifiche: debbono risultare uguali:

```
(%i126) trigsimp(diff(menogdet,r)/(2*menogdet));
(%o126) 
$$\frac{2 r}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$$

```

```
(%i127) trigsimp(mcs[2,1,1]+mcs[2,2,2]+mcs[2,3,3]+mcs[2,4,4]);
(%o127) 
$$\frac{2 r}{a^2 \cos(\theta)^2 + r^2}$$

```

Giusto! Vedere il Landau per questa importante formula di verifica che deve valere SEMPRE.

Ed anche questa coppia deve risultare uguale anche se Maxima fatica un po' ad accorgersene...

```
(%i128) va:trigsimp(diff(menogdet,theta)/(2*menogdet));
(%o128) 
$$\frac{3 a^2 \cos(\theta)^3 + (r^2 - 2 a^2) \cos(\theta)}{a^2 \sin(\theta)^3 + (-r^2 - a^2) \sin(\theta)}$$

```

```
(%i129) vb:trigsimp(mcs[3,1,1]+mcs[3,2,2]+mcs[3,3,3]+mcs[3,4,4]);
(%o129) 
$$\frac{(3 a^2 \cos(\theta)^3 + (r^2 - 2 a^2) \cos(\theta)) \sin(\theta)}{a^2 \cos(\theta)^4 + (r^2 - a^2) \cos(\theta)^2 - r^2}$$

```

Possono sembrare due espressioni diverse ma non lo sono...

```
(%i130) trigsimp(va-vb);
(%o130) 0
```